

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем

*Материалы
XII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 28–31 мая 2018 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems (MCM-2018)

*Proceedings of the Twelfth International
Conference MCM-2018*

Penza, Russian Federation, 28–31 May, 2018

E d i t e d b y
Ilya V. Boikov

Пенза • Издательство ПГУ • 2018

УДК 51
ББК 22.1
М64

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Международ. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28–31 мая 2018 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – 334 с.

ISBN 978-5-907018-91-4

Отражены основные результаты работы XII Международной научно-технической конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, биологии; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры.

Предназначено для обучающихся по направлению «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 21.1

О р г а н и з а ц и о н н ы й к о м и т е т

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
Д. В. Артамонов, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. И. Горбаченко**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. К. Задирака**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Украины (Киев, Украина); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. В. Маркин**, д.социол.н., профессор (Москва, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Д. Г. Саникидзе**, д.ф.-м.н., профессор (Тбилиси, Грузия); **В. С. Сизиков**, д.т.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

О т в е т с т в е н н ы й с е к р е т а р ь к о н ф е р е н ц и и

А. Н. Тында, к.ф.-м.н., доцент (Пенза, Россия)

ISBN 978-5-907018-91-4

© Пензенский государственный университет, 2018

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. А. Бельский

Гомельский государственный технический
университет им. П. О. Сухого, г. Гомель, Россия
E-mail: vadzimbelsky@rambler.ru

Вопросы устойчивости работы механизмов и устройств различной природы имеют важнейшее значение при изучении проблем безопасности жизнедеятельности. Известно, что для самых различных явлений окружающей действительности могут быть построены математические модели в виде дифференциальных уравнений и систем. С помощью систем дифференциальных уравнений, в частности, описываются механические системы с конечным числом степеней свободы, процессы, происходящие в электрических схемах [1], функционирование биологических систем, проблемы экологического равновесия.

После построения математической модели реальной системы в виде системы дифференциальных уравнений мы приходим к необходимости ее исследования. При этом нас зачастую не устраивает численное решение поставленной задачи, так как в этом случае мы сталкиваемся с неточностью задания начальных условий, неточностью задания самой дифференциальной системы, с вопросами, связанными с поведением решений на больших интервалах времени и вытекающих отсюда проблем устойчивости решений, а, значит, и устойчивости работы реальной системы, устройства или механизма.

Пусть работа реального объекта характеризуется значениями конечного набора параметров $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ в каждый момент времени. Предположим, что изменение состояния (работа) машины подчиняется системе дифференциальных уравнений, которую мы будем кратко записывать в векторном виде

$$\dot{p} = P[p(t)]. \quad (1)$$

Пусть, кроме того $p(t) = f(t)$ – решение системы (1), которое описывает оптимальный режим работы машины. Необходимо осуществлять регулирование работы такой машины так, чтобы разность $x(t) = p(t) - f(t)$ была незначительной. Осуществив такую замену переменных, мы от системы (1) переходим к системе

$$\dot{x} = X(t, x). \quad (2)$$

Система (2) является неавтономной, и ее исследование может оказаться весьма затруднительным. Идея состоит в том, чтобы для системы (2) подобрать другую систему, которая была бы в некотором смысле качественно эквивалентной исходной, но проще для исследования. Такая система может служить моделью не одного, а нескольких однотипных явлений. Тогда, при выполнении определенных условий, количество периодических решений и характер их устойчивости одинаковы для обеих систем. Иногда для системы вида (2) удается построить динамическую систему той же размерности, т.е. систему вида $\dot{x} = X(x)$, правая часть которой не зависит явно от времени t . Такие системы, особенно системы второго порядка, исследованы гораздо глубже [2].

Рассмотрим неавтономную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \sin 4t - y(\cos^2 2t + 0,25 \sin 4t), \\ \dot{y} &= x(\sin^2 2t + 0,25 \sin 4t) + y \cos^2 2t. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\varphi(t; t_0, x_0)$ – ее общее решение в форме Коши, которого мы, впрочем, не знаем, так как не имеем возможности проинтегрировать эту систему, однако пусть $\varphi(t; t_0, x_0)$ – ее общее решение в форме Коши. Введем в рассмотрение специальную функцию $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$, называемую отражающей [3]. Не зная общего решения, мы, тем не менее, можем определить вид этой функции [5]

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} x \cos 2t + y \sin 2t \\ -x \sin 2t + y \cos 2t \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Опираясь на свойства функции (4), можно доказать, что все решения системы (3) 2π -периодические. Более того, система (3) эквивалентна динамической системе $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$, фазовые кривые которой представляют собой окружности с центром в начале координат.

Некоторые идеи, касающиеся способов построения таких эквивалентных систем изложены автором в [5] и основаны на применении отражающей функции (см. выше), как инструмента качественного исследования дифференциальных систем. Практическое применение этой функции продемонстрировано также в работе [4] для изучения динамики жертв при пожарах.

Конечно, следует отметить, что построить систему, эквивалентную изучаемой, во многих случаях очень сложно. Кроме того, для многих неавтономных систем не существует автономных систем, эквивалентных им в том смысле, как это было показано выше. Покажем, как можно поступить в таком случае. Снова вернемся к системе (2), описывающей ра-

боту изучаемого механизма. Придадим системе (2) некоторое внешнее воздействие, т.е. будем рассматривать возмущенную систему

$$\dot{x} = X(t, x) + \Delta(t, x), \quad (5)$$

где $\Delta(t, x)$ – некоторая вектор-функция, подлежащая определению.

Система (2) является дифференциальной моделью нашей машины. Возмущенная система (5) уже не является такой моделью, а, точнее, является моделью другого процесса. Однако мы ставим задачу оказать на систему (2) такое воздействие, чтобы системы (2) и (5) были качественно эквивалентны в смысле одинакового количества периодических решений, совпадения начальных данных этих решений и характера их устойчивости.

В [3, с. 172–173] показано, что эту цель можно достичь, если функцию $\Delta(t, x)$ подбирать в некотором специальном виде.

Опираясь на эту теорию, автором уже получены определенные результаты, правда, пока только для систем первого порядка. В частности, пусть уравнение

$$\dot{x} = \delta(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3, \quad (6)$$

где $\delta(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ – некоторые непрерывные функции от времени, описывает некоторое движение. Пусть мы имеем возможность управлять этим движением, изменяя функцию $\delta(t)$, в отличие от остальных коэффициентов $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$, которые жестко фиксированы. Доказано [5], что если функцию $\delta(t)$ подобрать в виде

$$\delta(t) = \frac{1}{27a_3^2} [9a_1a_2a_3 + 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2) - 2a_2^3],$$

то можно построить целый

класс уравнений, эквивалентных уравнению (6). Более того, при дополнительных условиях на коэффициенты, в этом классе содержится уравнение вида

$$\dot{y} = f(t)(c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3), \quad (7)$$

где $c_i, i = \overline{0,3}$ являются константами. Очевидно, что уравнение (7) всегда можно проинтегрировать в квадратурах. Предположим, что $y = y(t)$ – 2ω -периодическое решение этого уравнения. Тогда мы наверняка знаем, что этому решению соответствует такое движение $x = x(t)$ уравнения (6), которое удовлетворяет краевой задаче $x(-t) = x(t)$, причем оба движения $x(t)$ и $y(t)$ устойчивы или неустойчивы одновременно.

Библиографический список

1. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.

2. Ла-Салль, Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М. : Мир, 1964. – 168 с.

3. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / Министерство образования РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – 2004. – 196 с.

4. Бельский, В. А. Моделирование чрезвычайных ситуаций с помощью отражающей функции / В. А. Бельский // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2007. – Т. 2, № 1. – С. 58–64.

5. Бельский, В. А. Полиномиальные дифференциальные уравнения и системы с одинаковыми отражающими функциями : монография / В. А. Бельский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2014. – 176 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ¹

И. К. Искандаров, Х. Х. Имомназаров*, М. В. Урев**

Тихоокеанский государственный университет,
г. Хабаровск, Россия,

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия,

**Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Россия

E-mail: iskandarovilkham@mail.ru, imom@omzg.sccc.ru

Формы движения двухфазных потоков значительно многообразнее, а законы, ими управляющие, существенно сложнее, чем формы движения и законы гидродинамики однородных сред. Интерес исследователей к проблемам и задачам механики многофазных сред обусловлен широким распространением таких систем в природе и их интенсивным использованием в современной технике.

Постановка задачи

В ограниченной односвязной области Ω трехмерного евклидова пространства R^3 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается линейная стационарная неоднородная система двухскоростной гидродинамики [1–3].

$$v_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \mathbf{grad} p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = q_1 \text{ в } \Omega \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-41-540010, 18-51-41002).

$$v_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{grad} p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = q_2 \text{ в } \Omega \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_1 = q_1, \quad \mathbf{u}_2 = q_2 \text{ на } \partial\Omega \quad (3)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ – массовая сила, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, $i = 1, 2$, $\mathbf{grad}$ – оператор градиента по $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, v_1, v_2 – соответствующие сдвиговые вязкости фаз [5]. Через Δ и Δ будем обозначать векторный и скалярный операторы Лапласа соответственно, так что

$$\Delta \mathbf{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \Delta \varphi = \operatorname{div} \mathbf{grad} \varphi.$$

Рассмотрение системы при гладких данных

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (1)–(3), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью. Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (1) и (2) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ получим, что

$$\operatorname{div} \Delta \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) = \Delta (\operatorname{div} \mathbf{v}) \quad (4)$$

Далее, действуя на первые векторные уравнения в (1) и (2) оператором дивергенции, получим из одного уравнения

$$\Delta p = v_1 \Delta q_1 + \rho \operatorname{div} \mathbf{f},$$

а из другого

$$\Delta p = v_2 \Delta q_2 + \rho \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad (5)$$

откуда

$$v_1 \Delta q_1 = v_2 \Delta q_2. \quad (6)$$

Граничные функции $\mathbf{g}_i$ в (3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} q_i \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Систему уравнений (1) – (3) можно свести к равносильной системе с однородными дивергентными и краевыми условиями. Для этого введем функции $\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{grad} \psi_i$, $i = 1, 2$, где ψ_i – решения граничных задач

$$\Delta \psi_i = q_i \text{ в } \Omega, \quad \psi_i = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Тогда новые искомые функции $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\nu_i \Delta \tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{grad} p = \tilde{\mathbf{f}}_i, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i = 0 \text{ в } \Omega, i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{a}_2 \text{ на } \partial\Omega. \quad (9)$$

где $\tilde{\mathbf{f}}_i = -\nu_i \Delta \mathbf{grad} \psi_i - \rho \mathbf{f}_i$ в Ω , $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}_i - \mathbf{grad} \psi_i$ на $\partial\Omega$.

Отметим, что если имеют место соотношения (6) и (7), то правые части $\tilde{\mathbf{f}}_i$ в (8) и граничные функции $\mathbf{a}_i$ в (9) удовлетворяют условиям $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{f}}_1 = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{f}}_2$ в Ω ,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Граничные функции $\mathbf{a}_i$ в (9), удовлетворяющие условиям (10), могут быть продолжены в область Ω в виде соленоидальных функций $\mathbf{z}_i$, то есть так, что $\operatorname{div} \mathbf{z}_i = 0$ в Ω и $\mathbf{z}_i = \mathbf{a}_i$ на $\partial\Omega$ [см. [4] с. 38, [5] Лемма 2.2].

Положим

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{z}_i.$$

Тогда из системы (8)–(9) получим следующую систему уравнений относительно функций $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, p$:

$$\nu_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{grad} p = \mathbf{f}_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (12)$$

где $\mathbf{f}_i = \tilde{\mathbf{f}}_i - \nu_i \Delta \mathbf{z}_i$ в Ω . Кроме того, функции $\mathbf{f}_i$ должны удовлетворять условию разрешимости системы (11)–(12), а именно, необходимо, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{f}_2 \text{ в } \Omega. \quad (13)$$

Далее будем рассматривать систему уравнений (11) - (12), которая является переопределенной, так как состоит из восьми уравнений и семи искомых скалярных функций и, следовательно, не является эллиптической. Следуя [6] мы добавим к нашей системе градиент от новой искомой функции φ с нулевым граничным условием так, что наша система станет эллиптической. Такую функцию φ принято называть множителем Лагранжа. Итак, вместо системы (11)–(12) будем рассматривать расширенную систему

$$\nu_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \mathbf{grad} p = \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (14)$$

$$\nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 - \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (16)$$

Решение системы (14)–(16) сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача для $(\mathbf{v}_1, p)$:

$$\mathbf{v}_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \mathbf{grad} p = \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_1 = 0, \text{ на } \partial\Omega. \quad (17)$$

Затем определяется пара $(\mathbf{v}_2, \varphi)$ как решение системы

$$\mathbf{v}_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{grad} p + \mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (18)$$

Для задач (17) и (18) выполнение условия согласования (13) не предполагается. Если же условие (13) выполнено, то $\varphi = 0$ в Ω и тройка функций $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, p)$ удовлетворяет системе (11)–(12). Действительно, пусть выполнено условие (13). Тогда после применения к первому уравнению системы (17) и к первому уравнению системы (18) оператора div , ввиду (4), (13) и равенств $\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0$, $i = 1, 2$, получим:

$$-\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{grad} \varphi) = \Delta \varphi,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} p + \mathbf{f}_2) = \Delta p + \operatorname{div} \mathbf{f}_2 = -\operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \operatorname{div} \mathbf{f}_2 = 0.$$

Откуда имеем $\Delta \varphi = 0$ в Ω , $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$.

Значит $\varphi = 0$ в Ω .

Отметим, что множитель Лагранжа φ можно было ввести в первое векторное уравнение системы (14) и последовательно решать две краевые задачи в обратном порядке. При выполнении условия согласования (13) результат решения не изменится.

Заключение

Таким образом, для исходной переопределенной системы (1)–(3) устанавливается необходимое условие разрешимости. Затем система (1)–(3) заменой неизвестных скоростей и правых частей в векторных уравнениях (1) и (2) приводится к системе с однородными дивергентными ограничениями и однородными краевыми условиями для скоростей. Для преобразованной системы необходимым условием разрешимости является равенство дивергенций от правых частей векторных уравнений. Наличие условий согласования данных связано с переопределенностью системы (1)–(3). В полученную переопределенную систему вводится дополнительное слагаемое в виде градиента от новой неизвестной скалярной функции с нулевым граничным условием. Такая функция называется множителем Лагранжа. Далее, решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и задачи с множителем Лагранжа для второй скорости.

Библиографический список

1. Джураев, Д. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике / Д. Джураев, Х. Х. Имом-

назаров, М.В. Урев // Математическая физика и родственные проблемы современного анализа : тезисы респ. науч. конф. (с участием зарубежных ученых) (26–27 ноября 2015 г., Бухара). – Бухара, 2017. – С. 197–198.

2. Имомназаров, Х. Х. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением / Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров, М. М. Маматкулов, Е. Г. Черных // Сибирский журнал индустриальной математики, 2014. – Т. 17, № 4. – С. 60–66.

3. Жабборов, Н. М. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред / Н. М. Жабборов, Х. Х. Имомназаров. – Ташкент, 2012. – 212 с.

4. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1970. – 288 с.

5. Girault, V. Finite element methods for Navier-Stokes equations. / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin : Springer-Verlag, 1986.

6. Гудович, И. С. Краевые задачи для уравнений Максвелла / И. С. Гудович, С. Г. Крейн, И. М. Куликов // Доклады АН СССР. – 1972. – Т. 207, № 2. – С. 321–324.

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров*, А. И. Дрегля**

Иркутский государственный университет,
г. Иркутск, Россия

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, г. Иркутск, Россия

**Институт геохимии им. А. П. Виноградова
Сибирского отделения РАН, г. Иркутск, Россия

E-mail:sidorovisu@gmail.com,
contact.dns@gmail.com, adreglea@gmail.com

Введение

Дифференциальное уравнение

$$B(t)\frac{du}{dt} = A(t,u)$$

с необратимым оператором $B(t)$ привлекало внимание многих математиков. Уравнение относится к уравнениям соболевского типа [1] и в последнее время нашло много новых приложений. Интересные результаты о ветвлении его решений получены в случае необратимого стационарно-

го оператора $B: D \subset X \rightarrow Y$, X, Y – банаховы пространства [6,7]. В монографии [7] применялся широкий спектр методов теории дифференциально-операторных уравнений, функционального анализа, асимптотических методов. Были доказаны теоремы существования, конвергентности и устойчивости решений, разработаны приближенные методы решения начально-краевых задач. В линейном случае для некоторых классов предложена аналитическая методика построения точных решений. Тем ни менее в [7] и других работах нерешенной проблемой оставалась задача конструктивного описания структуры неограниченных решений в окрестности точек t_0 , где оператор $B(t_0)$ не имеет обратного. Результаты численных экспериментов в их окрестностях трудно интерпретируются ввиду их неустойчивости [12]. Особенно сложным является анализ структур разрушающихся решений. Поэтому разработка методов асимптотического анализа в окрестностях особых точек оператора $B(t)$ важна в теоретическом и прикладном плане.

Перспективным подходом здесь является сочетание модификации тонких подходов аналитической теории дифференциальных уравнений (использование разложений типа Фукса-Фробениуса, Пьюзе-Брюно), методов спектральной теории линейных операторов, функционального и группового анализа, примененных в работах [4-9] и др.

Цель данной заметки – дать необходимые и достаточные аналитические условия существования разрушающихся решений в окрестности точек t_0 , в которых оператор $B(t_0)$ не имеет обратного и указать асимптотику решений.

Структура работы. В п. 1 проблема построения неограниченного решения впервые поставлена как специальная предельная начальная задача. В п.2 приведены необходимые условия выполнения начального условия (2) поставленной задачи. В п. 3 доказана теорема существования начальной задачи и дан способ ее решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное уравнение

$$B(t) \frac{du}{dt} = A(t)u + f(t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} B(t)u(t) = y_0. \quad (2)$$

Фредгольмов оператор $B(t_0)$ не имеет обратного, y_0 принадлежит области значения оператора $B(t_0)$. Условие (2) естественно назвать предельным начальным условием. Требуется получить условие суще-

ствования неограниченного решения начальной задачи (1)–(2). Не ограничивая общности, далее будем считать, что $t_0 = 0$. Пусть

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} B(t) &= B_0 + B_1 t + \dots, \quad A(t) = A_0 + A_1 t + \dots, \\ f(t) &= f_0 + f_1 t + \dots \text{ при } |t| < \rho, \end{aligned}$$

$B_0 : D \subset X \rightarrow Y$ – Фредгольмов оператор, $\bar{D} = X$, $B_1, B_2, \dots, A_0, A_1, \dots$ – линейные ограниченные операторы из X в Y , X, Y – банаховы пространства, f_i – элементы из Y .

Искомое решение $u(t)$ будем искать в классе X_p функций, определенных при $0 < |t| < \rho$ со значениями в X , с полюсом p -го порядка:

$$u(t) \sim \frac{u_{-p}}{t^p} + \dots + \frac{u_{-1}}{t} + u_0 + u_1 t + \dots, u_{-p} \neq 0. \quad (3)$$

Класс X_0 отвечает случаю, когда условие (2) вырождается в условие $B(0)u(0) = y_0$ использованное ранее в ряде работ для построения ограниченных решений уравнения (1).

2. Необходимое условие разрешимости задачи (1)–(2) в классе X_p

Введем векторы $w = (u_{-p}, u_{-p+1}, \dots, u_{-1}, u_0)^T$, $\beta = (0, \dots, 0, y_0)^T$ и блочный оператор размерности $(p+1) \times (p+1)$:

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} B_0 & \dots & \\ B_1 B_0 & & \vdots \\ B_p B_{p-1} & \dots & B_1 B_0 \end{bmatrix}.$$

Лемма. Для того чтобы задача (1)–(2) могла иметь решение в классе X_p ($p \in \mathbb{N}$) необходимо, чтобы система

$$\Phi_p w = \beta \quad (4)$$

была разрешима.

Доказательство очевидно, т.к. подстановка ряда (3) в начальное условие (2) и применение метода неопределенных коэффициентов приведет к системе (4).

Введем условие

II. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – базис в $N(B_0)$, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ – базис в $N(B_0^*)$,

$$B_i \varphi = 0, \quad i = \overline{1, p} \quad \forall \varphi \in N(B_0), \quad \langle \gamma_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \langle \psi_i, z_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases},$$

$$\langle \psi_i, y_0 \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$u_k = (c_k, \varphi), \quad k = -p, -p+1, \dots, -1, \quad u_0 = (c_0, \varphi) + (B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i)^{-1} y_0 -$$

суть общее решение системы (4) $(c_k, \varphi) = \sum_{i=1}^n c_{k_i} \varphi_i$, где c_{k_i} – произвольные постоянные.

3. Достаточные условия существования решения задачи (1), (2) в классе X_p

Предположим, что выполнены условия I, II, а коэффициенты $u_{-p}, \dots, u_{-1}, u_0$ заданы выше и зависят от произвольных постоянных. Пусть кроме того

III. $A_i \varphi = 0, i = \overline{0, p-1} \quad \forall \varphi \in N(B_0).$

Пусть

IV. $\det M_m \neq 0$ при $m \in \mathbb{N}.$

Здесь M_m – пучок квадратных матриц размерности $n \times n$ определяется по формуле

$$M_m = D + (p+1-m)B, \quad D = [\psi_i, A_p \varphi_j]_{i,j=\overline{1,n}},$$

$$B = [\psi_i, B_{p+1} \varphi_j]_{i,j=\overline{1,n}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда подставляя ряд (3) в уравнение (1) и применяя метод неопределенных коэффициентов получим для определения коэффициентов ряда (3) систему (4) и рекуррентную последовательность линейных уравнений относительно $u_1, u_2, \dots$:

$$B_0 u_1 = (A_p + pB_{p+1})(C_{-p}, \varphi) + f_0 =: L_1(C_{-p}), \dots$$

$$mB_0 u_m = L_m(C_{-p+m-1}, u_1, \dots, u_{m-1}), m = 2, \dots \quad (5)$$

Из последовательности (5) в силу условий I-IV, проекции иско-
мых коэффициентов $Pu_i, (I-P)u_i, i = -p, -p+1, \dots$, где $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$,
вычисляются единственным образом. Т.к. B_0 – фредгольмов оператор,
то для определения коэффициентов проекции Pu_i можно использовать
условия разрешимости уравнений последовательности (5).

Справедлива **Теорема.** Пусть B_0 – фредгольмов оператор и выполнены условия I–IV,

$$\widehat{B}_0 = \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right).$$

Тогда коэффициенты разложения Лорана (3) решения начальной задачи (1), (2) определяются однозначно. А именно, коэффициенты C_j^* проекций $Pu_j, j = -p, -p+1$, определяются из регулярных СЛАУ

$$M_m C_{-p+m-1} + \beta_{-p+m-1} = 0, \quad (6)$$

где вектор β_{-p+m-1} из R^n зависит при каждом m от ранее определенных проекций искоемых коэффициентов. Проекции $(I - P)u_j$ вычисляются последовательно по формуле

$$(I - P)u_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j = -p, -p+1, \dots, 1, \\ \widehat{B}_0^{-1} y_0 & \text{при } j = 0, \\ \frac{1}{j} \widehat{B}_0^{-1} L_j(C_{-p+j-1}^*) & \text{при } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

В формуле (7) $L_j(C_{-p+j-1}^*)$ – элементы из пространства Y вычисляются по определенным формулам. $\widehat{B}_0^{-1}$ – линейный ограниченный оператор.

Библиографический список

1. Свешников, А. Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М : Физматлит, 2007. – 736 с.
2. Кудряшов, Н. А. Методы нелинейной математической физики / Н. А. Кудряшов. – М. : Интеллект ИД. – Изд. 2. – 2008. – 384 с.
3. Сидоров, Н. А. О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 404–409.
4. Треногин, В. А. Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точек ветвления / В. А. Треногин, Н. А. Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1978. – Т. 19, № 1. – С. 180.
5. Дрегля, А. И. О решениях одной нелинейной краевой задачи на полуоси с малым параметром / А. И. Дрегля // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 313–316.
6. Сидоров, Н. А. О малых решениях нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точек ветвления / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2011. – № 5. – С. 53–61.
7. Sidorov, N. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publisher, 2002. – 568 p.

8. Сидоров, Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами / Н. А. Сидоров // Математический сборник. – 1995. – Т. 186, № 2. – С. 129–141.
9. Треногин, В. А. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия / В. А. Треногин, Н. А. Сидоров, Б. В. Логинов // Доклады Академии наук СССР. – 1989. – Т. 309, № 2. – С. 286–289.
10. Sidorov, N. A. On small solutions of nonlinear equations with vector parameter in sectorial neighborhoods / N. A. Sidorov, R. Y. Leont'ev, A. I. Dreglya // Mathematical Notes. – 2012. – Vol. 91, № 1–2. – P. 90–104.
11. Муфтахов, И. Р. О роли уравнений Вольтерра в обратной задаче теплопроводности с нелокальным граничным условием. / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, А. И. Дрегля // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы X Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов; под ред. И. В. Бойкова (23–27 мая 2016). – С. 15–19.
12. Сидоров, Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения / Д. Н. Сидоров; ред. В. К. Горбунов, А. Лоренци, В. С. Сизиков. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЯМИ

Я. Т. Мегралиев, Г. Н. Искендерова, С. И. Аллахвердиева*

Бакинский государственный университет.

г. Баку, Азербайджан

*Мингечевирский государственный университет,

г. Мингечевир, Азербайджан

E-mail: yashar_aze@mail.ru, gulnar1890@mail.ru,

seriye_allahverdiyeva@mail.ru

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развиваются и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Условия такого вида появятся при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2], [3], процессом влагопереноса в капиллярно-простых средах [4]. Заметим, что в большинстве публикаций, посвященных задачам с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений, рассматриваются пространственно нелокальные условия. В работе [5] рассмотрена задача с нелокальными по времени интегральными условиями для гиперболического уравнения. В работе исследована обратная краевая задача с нелокальными по времени интегральным условиям для гиперболического уравнения. Доказано существование единственного классического решения.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную задачу с условиями

$$u(x,0) = \phi(x),$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) + \int_0^T M(t)u(x,t)dt \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительными условием

$$u(1,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $f(x,t), g(x,t), \phi(x), \psi(x), M(t), h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ искомые функции.

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4) будем понимать пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x)$ и $a(t)$, если $u(x,t) \in C^2(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ и выполняются соотношения (1)-(4) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\phi(x), \psi(x) \in C[0,1], M(t) \in C[0,T], \int_0^T M(t)dt \neq 1,$

$h(t) \in C^2[0,T], g(x,t) \in C(D_T), g(1,t) \neq 0 (0 \leq t \leq T), f(x,t) \in C(D_T)$ и выполняется условия согласования

$$\phi(1) = h(0), \quad \psi(1) + \int_0^T M(t)h(t)dt = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функции $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$, из (1)-(3) и

$$h''(t) - u_{xx}(1,t) = a(t)g(1,t) + f(1,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (5)$$

Компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде:

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \right), \quad (6)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots)$$

дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0,T]$. Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (3.1) и (3.2) имеем:

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; a) \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (7)$$

$$u_k(0) = \phi_k,$$

$$u_k'(0) = \psi_k + \int_0^T M(t)u_k(t)dt \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (8)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)g_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx,$$

$$g_k(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx,$$

$$\phi_k = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Решая задачу (7), (8), находим, что

$$u_k(t) = \phi_k \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \left(\psi_k + \int_0^T M(t)u_k(t)dt \right) \sin \lambda_k t +$$

$$+\frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau; a) \sin \lambda_k(t-\tau) d\tau \quad (k=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Для определения первой компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)-(3), (5), учитывая соотношения (9), из (6) получаем:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \phi_k \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \left(\psi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt \right) \sin \lambda_k t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^T F(\tau; a) \sin \lambda_k(t-\tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (10)$$

Теперь, из (5), с учетом (6), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(l) \left\{ h''(t) - f(1, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \lambda_k^2 u_k(t) \right\}. \quad (11)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (5), подставим выражение (9) в (11):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(1, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (-1)^{k+1} \left[\phi_k \cos \lambda_k t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_k} \left(\psi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt \right) \sin \lambda_k x + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F(\tau; u, a) \sin \lambda_k(t-\tau) dt \right] \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (12) свелось к решению системы (10), (15) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (13) важную роль играет следующая.

Лемма. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое классическое решения задачи (1)-(3), (5), то функции $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx$ удовлетворяют системе (9).

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое решение задачи (1)-(3), (5). Тогда умножив обе части уравнения на функцию $2 \sin \lambda_k x$ ($k=1, 2, \dots$), интегрируя полученное неравенство по x от нуля до единицы и пользуясь соотношениями

$$2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \sin \lambda_k x dx = \frac{d^2}{dt^2} \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = u_k''(t),$$

$$2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) \sin \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t),$$

$k = 1, 2, \dots$, получаем, что удовлетворяется уравнение (7).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (8).

Таким образом, $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$), является решением задачи (7), (8). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (9). Лемма доказана.

Замечание. Из леммы следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (5) достаточно доказать единственность решения системы (10), (12).

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\phi(x) \in C^2[0, 1]$, $\phi'''(x) \in L_2(0, 1)$, $\phi(0) = \phi'(1) = \phi''(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^1[0, 1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi'(1) = 0$.
3. $f(x, t), f_x(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$,
 $f(0, t) = f_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $g(x, t), g_x(x, t) \in C(D_T)$, $g_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$,
 $g(0, t) = g_x(1, t) = 0$, $g(1, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $M(t) \in C[0, T]$, $h(t) \in C^2[0, T]$.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены 1–4. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)–(3), (5) имеет единственное решение.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая.

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и

$$\int_0^T M(t) dt \neq 1, \quad \phi(1) = h(0), \quad \psi(1) + \int_0^T M(t) h(t) dt = h'(0),$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение.

Библиографический список

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т.16, № 11. – С.1925–1935.
2. Cannon, J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J. R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. 5, 21. – P. 155–160.

3. Ионкин, Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

4. Нахушев, А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

5. Кириченко, С. В. Об одной краевой задаче с нелокальными по времени условиями для одномерного гиперболического уравнения / С. В. Кириченко // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2013, № 6(107). – С. 31–39.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ¹

И. К. Искандаров, Х. Х. Имомназаров*, М. В. Урев**

Тихоокеанский государственный университет,
г. Хабаровск, Россия,

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия,

**Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Россия

E-mail: iskandarovilkham@mail.ru, imom@omzg.sccc.ru

Математические модели многофазных или гетерогенных сред описывают различные явления гидро- и газодинамики, теории фильтрации, ракетостроения, угле- и нефтедобычи, ядерной и неядерной теплоэнергетики, металлургической и строительной промышленности, астрофизики. Модели многофазных сред возникают также при рассмотрении разнообразных задач описания техногенных систем: моделирование динамических процессов в нефтяных скважинах и приповерхностных пластах; а также при описании эндогенных процессов и при решении связанных с ними задач геодинамики и моделирования рудообразующих структур в рамках единой согласованной модели эволюции системы, включающей верхнюю мантию, мантийную литосферу и земную кору, включая геоэкологический мониторинг за конкретными природными и техногенными объектами.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-41-540010, 18-51-41002).

Обобщенная постановка задачи

Сначала приведем обобщенную постановку задачи [1]

$$\mathbf{v}_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \mathbf{grad} p = \mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_1 = 0, \text{ на } \partial\Omega, \quad (1)$$

где Ω – односвязная область трехмерного евклидова пространства R^3 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Для этого введем необходимые гильбертовы функциональные пространства [2]. Через $H^k(\Omega)$, где k – положительное целое, будем обозначать скалярные гильбертовы пространства Соболева $W_2^k(\Omega)$

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, D^α – это дифференциальный оператор

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

Норма и полунорма в них обозначаются через $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ и $|\cdot|_{k,\Omega}$ соответственно и определяются равенствами

$$\|f\|_{k,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f)^2 d\mathbf{x},$$

$$|f|_{(k,\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha f)^2 d\mathbf{x}.$$

Введем также пространства

$$H^k(\Omega) = \left(H^k(\Omega) \right)^3, \quad H_0^1(\|p\|_P) = \left\{ f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$X = H_0^1(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega) \right)^3, \quad P = L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Для пространства вектор-функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in H^k(\Omega)$ норма и полунорма в нем обозначаются аналогично скалярному случаю и определяются равенствами

$$\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{s=0}^k |u|_{s,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad |\mathbf{u}|_{k,\Omega} = \left(\sum_{i=0}^3 |u_i|_{s,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad s = 0, \dots, k.$$

Для функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in X$ и $p \in P$ имеем

$$\|\mathbf{u}\|_X = \left(\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|p\|_P = \|p\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} p^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Далее для $G \subset R^3$ через $(\cdot, \cdot)_{0,G}$ или просто $(\cdot, \cdot)_0$ в очевидных случаях, будем обозначать скалярное произведение как в $L^2(\Omega)$, так и в $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$. Таким образом, если $p, q \in L^2(\Omega)$, а $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, то

$$(p, q)_{0,G} = \int_{\Omega} p q d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,G} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Введем билинейные формы $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $X \times X$ и $b_1(\mathbf{v}, q)$ на $X \times P$

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_1 (\mathbf{grad} \mathbf{u}, \mathbf{grad} \mathbf{v})_0 = \nu_1 \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_0,$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v})_0.$$

Система (1) является стационарной задачей Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве ее обобщенной постановки примем широко распространенную смешанную формулировку: найти вектор-функцию $\mathbf{v}_1 \in X$ и функцию $p \in P$, удовлетворяющие равенствам

$$a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + b_1(\mathbf{u}, p) = -(\mathbf{f}_1, \mathbf{u})_0 \quad \forall \mathbf{u} \in X, \quad (2)$$

$$b_1(\mathbf{v}_1, q) = 0 \quad \forall q \in P. \quad (3)$$

Смешанная постановка (2)–(3) задачи Стокса в терминах скорость–давление исследована, например, в [3]. Там же подробно рассмотрен метод конечных элементов для численного решения данной задачи.

Теперь сформулируем обобщенную постановку для задачи

$$\nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{grad} p + \mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (4)$$

Для этого введем гильбертовы пространства, см. [7]

$$H(\mathbf{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \},$$

$$H_0(\mathbf{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

$$V = H_0(\mathbf{rot}; \Omega), \quad Q = H_0^1(\Omega).$$

Пространство V снабжается следующей нормой:

$$\|u\|_V = \left(\mathbf{rot} \mathbf{u}_{0,\Omega}^2 + \mathbf{u}_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{u} \in V.$$

Обозначим через $-\mathbf{F}_2$ правую часть в первом уравнении системы (18): $-\mathbf{F}_2 = \mathbf{grad} p + \mathbf{f}_2$.

Имея ввиду формулу векторного анализа для определения векторного оператора Лапласа, перепишем систему (4) в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}_2 - \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{F}_2 & \text{в } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 & \text{в } \Omega \\ \mathbf{v}_2 = 0, \varphi = 0 & \text{на } \partial \Omega \end{cases} \quad (5)$$

Теперь вариационную постановку задачи (5) в области Ω сформулируем следующим образом: пусть $\mathbf{F}_2 \in L^2(\Omega)$, требуется найти пару функций $(\mathbf{v}_2, \varphi) \in V \times Q$, удовлетворяющих равенствам

$$\begin{cases} a_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}) + b_2(\mathbf{u}, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \\ b_2(\mathbf{v}_2, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in Q. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $a_2(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ обозначают билинейные формы на пространствах $V \times V$ и $V \times Q$ соответственно

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_2 \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (7)$$

$$b_2(\mathbf{u}, \psi) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \psi \in Q. \quad (8)$$

Очевидно, что $a_2(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными билинейными формами на пространствах $V \times V$ и $V \times Q$ соответственно, а $F(\mathbf{u}) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0$ — непрерывным линейным функционалом на пространстве V . Билинейным формам $a_2(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ отвечают два ограниченных линейных оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V')$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H^{-1}(\Omega))$, определяемые как

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \psi \rangle = b_2(\mathbf{u}, \psi) \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \psi \in Q,$$

где V' и $H^{-1}(\Omega) = Q'$ — сопряженные пространства для V и Q соответственно, а запись $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает отношение двойственности между элементами исходного и сопряженного ему пространства.

Воспользуемся теперь спецификой нашей исходной задачи (6), связанной с конкретным видом билинейных форм $a_2(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$, которая позволяет исключить из системы (6) множитель Лагранжа φ . Отметим, что если $\psi \in Q$, то $\nabla\psi \in V$, и тогда

$$a_2(\mathbf{u}, \nabla\psi) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \psi \in Q,$$

что позволяет выделить из системы (6) отдельную задачу для множителя Лагранжа φ , а именно, найти $\varphi \in Q$

$$b_2(\nabla\psi, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (9)$$

Используя (9), перепишем второе уравнение в системе (22) в следующем виде:

$$b_2(\mathbf{v}_2, \psi) + \beta b_2(\nabla\psi, \varphi) = \beta (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (10)$$

где $\beta > 0$ – произвольная постоянная.

Равенство (10) будем рассматривать как другое уравнение относительно функции φ , то есть как задачу определения $\varphi \in Q$:

$$c(\varphi, \psi) = \beta^{-1} b_2(\mathbf{v}_2, \psi) - (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (11)$$

Здесь $c(\cdot, \cdot): Q \times Q \rightarrow R$ – билинейная форма, определяемая равенством

$$c(\varphi, \psi) = -b_2(\nabla\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in Q.$$

Непрерывность формы $c(\cdot, \cdot)$ на $Q \times Q$ и ее Q – эллиптичность показаны в [4]. Ограниченность линейного функционала в правой части (11) на пространстве Q также устанавливается просто:

$$\left| (\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 - \beta^{-1} b_2(\mathbf{v}_2, \psi) \right| \leq (\mathbf{F}_{20} + \beta^{-1} \mathbf{v}_{20}) \|\psi\|_1 \quad \forall \psi \in Q.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса – Мильграма для однозначной разрешимости вариационной задачи (11).

Представим задачу (11) в операторном виде. Известно (см.[3], п.1.2), что ограниченный линейный оператор $C: Q \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, определяемый равенством

$$\langle C\varphi, \psi \rangle = c(\varphi, \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in Q$$

является изоморфизмом и, следовательно, имеет ограниченный обратный оператор $C^{-1}: H^{-1}(\Omega) \rightarrow Q$. Напомним также определение обобщенной дивергенции функции $\mathbf{F}_2 \in L^2(\Omega)$ как функционала $\text{div } \mathbf{F}_2 \in H^{-1}(\Omega)$, который задается равенством

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{F}_2, q \rangle = -(\mathbf{F}_2, \nabla q)_0 \quad \forall q \in Q.$$

Теперь вариационную задачу (11) можно переписать в следующем виде:

$$\langle C\varphi, \psi \rangle = \langle \beta^{-1} \mathcal{B} \mathbf{v}_2, \psi \rangle + \langle \operatorname{div} \mathbf{F}_2, q \rangle \quad \forall \psi \in Q,$$

что соответствует операторному уравнению

$$C\varphi = \beta^{-1} \mathcal{B} \mathbf{v}_2 + \operatorname{div} \mathbf{F}_2.$$

Таким образом, решение задачи (11) можно представить как

$$\varphi = \beta^{-1} C^{-1} \mathcal{B} \mathbf{v}_2 + C^{-1} \operatorname{div} \mathbf{F}_2. \quad (12)$$

Подставляя в первое уравнение системы (16) вместо функции φ ее выражение в правой части (12), получим отдельную вариационную задачу для определения векторной функции $\mathbf{v}_2$ во всем пространстве V . Именно, найти $\mathbf{v}_{2,\beta} \in V : \forall \mathbf{u} \in V$

$$a_2(\mathbf{v}_{2,\beta}, \mathbf{u}) + \beta^{-1} \langle \mathcal{B} \mathbf{u}, C^{-1} \mathcal{B} \mathbf{v}_{2,\beta} \rangle = (F_2, \mathbf{u})_0 - \langle \mathcal{B} \mathbf{u}, C^{-1} \operatorname{div} \mathbf{F}_2 \rangle. \quad (13)$$

Теорема существования и единственности решения вариационной задачи (13) доказана в [4].

Отметим, что в отличие от общего случая регуляризации (см. [3], п. 4.3) использование специфики билинейной формы $a_2(\cdot, \cdot)$ и билинейной формы $c(\cdot, \cdot)$, связанной с оператором Лапласа c , позволило сформулировать регуляризованную задачу в виде уравнения (13) так, что пара $(\mathbf{v}_{2,\beta}, \varphi_\beta)$ будет точным решением системы (6) при любом $\beta > 0$. Здесь $\mathbf{v}_{2,\beta}$ – решение задачи (13), а φ_β определяется формулой (12). В случае выполнения равенства $\operatorname{div} \mathbf{F}_2 = 0$, что соответствует условию согласования $\operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{f}_2$ для задач (1) и (4), нетрудно видеть, что $\varphi_\beta = 0$ и $\mathbf{v}_{2,\beta}$ является решением задачи (5) без множителя Лагранжа φ .

Заключение

Таким образом, для исходной переопределенной системы сформулированы обобщенные постановки для приведенных выше двух краевых задач. Для задачи Стокса принята хорошо изученная смешанная обобщенная постановка в терминах скорость-давление. Для второй векторной задачи смешанная обобщенная постановка оригинальным приемом приводится к регуляризованному уравнению.

Библиографический список

1. Джураев, Д. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике / Д. Джураев, Х. Х. Имом-

назаров, М.В. Урев // Математическая физика и родственные проблемы современного анализа : тезисы респ. Науч. конф. (с участием зарубежных ученых) (26–27 ноября 2015 г., Бухара). – Бухара, 2015. – С. 197–198.

2. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М. : Мир, 1971.

3. Girault, V. Finite element methods for Navier-Stokes equations / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin : Springer-Verlag, 1986.

4. Кремер, И. А. Регуляризация стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде и решение ее методом конечных элементов / И. А. Кремер, М. В. Урев // Сибирский журнал вычислительной математики, 2009. – Т. 12, № 2. – С. 161–170.

О ДОСТАТОЧНЫХ КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ¹

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: boikov@pnzgu.ru, ryazantsevv@mail.ru

Данная статья является обзором результатов, полученных авторами в области исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с частными производными различных типов. Применяемый авторами подход основан на применении к исходной системе дифференциальных уравнений в частных производных преобразования Фурье и оценке сверху нормы решения операторного уравнения полученной параметрической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При получении оценок используется связь экспоненты оператора с логарифмической нормой оператора.

Логарифмическая норма $\Lambda(A)$ оператора A вычисляется по формуле $\lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$. В случае, если оператор A определяется квадратной матрицей n -го порядка $(a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$, логарифмическая норма $\Lambda(A)$ в зависимости от нормы пространства векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ может быть вычислена по одной из формул:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

$$\Lambda(A) = \sup_{j=1, n} \left(a_{jj} + \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}| \right), \quad \|x\| = \max_{k=1, n} |x_k|, \quad (1)$$

$$\Lambda(A) = \sup_{j=1, n} \left(a_{jj} + \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{kj}| \right), \quad \|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad (2)$$

$$\Lambda(A) = \lambda_{\max} \left[\frac{A + A^*}{2} \right], \quad \|x\| = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Предложенный авторами подход оказался весьма эффективным инструментом исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического [1] и гиперболического [2] типов. Дальнейшие исследования позволили распространить данный подход на дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков, в последние годы находящих все большее применение в различных областях науки и техники.

Напомним определение дробной производной. Производная ${}_{-\infty}D_{x_k}^{\nu_j}(u)$ функции $u(x_1, \dots, x_n)$ в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка $\nu_j > 0$ по переменной x_k определяется формулой

$${}_{-\infty}D_{x_k}^{\nu_j} = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\nu_j\})} \frac{d^{[\nu_j]+1}}{dx^{[\nu_j]+1}} \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^{\{\nu_j\}}} d\xi,$$

где Γ – гамма-функция, $[\nu_j]$ – целая часть порядка дробной производной ν_j , а $\{\nu_j\}$ – дробная часть ν_j , так что $\nu_j = [\nu_j] + \{\nu_j\}$.

В статье [3] рассматривается следующее нелинейное параболическое уравнение с дробными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} = & a_1(t) \cdot {}_{-\infty}D_{x_1}^{\nu_1} u(t, x_1, x_2) + a_2(t) \cdot {}_{-\infty}D_{x_2}^{\nu_2} u(t, x_1, x_2) + \\ & + a_3(t) \cdot {}_{-\infty}D_{x_1}^{\nu_3} {}_{-\infty}D_{x_2}^{\nu_4} u(t, x_1, x_2) + a_4(t) \cdot {}_{-\infty}D_{x_2}^{\nu_5} {}_{-\infty}D_{x_1}^{\nu_6} u(t, x_1, x_2) + \\ & + a_5(t) u(t, x_1, x_2) + g(t, u), \end{aligned} \quad (4)$$

$$u(t_0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2), \quad (5)$$

где $t \geq t_0$, а ν_k , $k = \overline{1, 6}$ – фиксированные положительные числа.

Для этого уравнения получено следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) функции $a_1(t), \dots, a_5(t)$ непрерывны при $t \geq t_0$;

2) для любых вещественных значений ω_1, ω_2 и для $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\psi(t, \omega) < -\gamma$, где γ – некоторое положительное число, и

$$\begin{aligned} \psi(t, \omega) = & a_5(t) + a_1(t)|\omega_1|^{v_1} \cos(\pi v_1/2) + a_2(t)|\omega_2|^{v_2} \cos(\pi v_2/2) + \\ & + a_3(t)|\omega_1|^{v_3} |\omega_2|^{v_4} [\cos(\pi v_3/2) \cos(\pi v_4/2) - \operatorname{sgn}(\omega_1) \operatorname{sgn}(\omega_2) \times \\ & \times \sin(\pi v_3/2) \sin(\pi v_4/2)] + a_4(t)|\omega_1|^{v_5} |\omega_2|^{v_6} [\cos(\pi v_5/2) \cos(\pi v_6/2) - \\ & - \operatorname{sgn}(\omega_1) \operatorname{sgn}(\omega_2) \sin(\pi v_5/2) \sin(\pi v_6/2)]; \end{aligned}$$

3) функция $g(t, u)$ непрерывна по обеим переменным и удовлетворяет условию $\|g(t, u)\| \leq \beta \|u\|$, где β – неотрицательное число, причём справедливо неравенство $\beta < \gamma/\sqrt{2}$.

Тогда тривиальное решение уравнения (4) асимптотически устойчиво.

В статье [3] также рассмотрен случай системы из двух линейных параболических уравнений с дробными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} = & a_{1,1}(t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{1,2}(t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + a_{1,3}(t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + a_{1,4}(t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + a_{1,5}(t) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ & + a_{1,6}(t) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + a_{1,7}(t) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + a_{1,8}(t) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{1,9}(t) u_1 + a_{1,10}(t) u_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} = & a_{2,1}(t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{2,2}(t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + a_{2,3}(t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \\ & + a_{2,4}(t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + a_{2,5}(t) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + a_{2,6}(t) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \\ & + a_{2,7}(t) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + a_{2,8}(t) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{2,9}(t) u_1 + a_{2,10}(t) u_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_1(t_0, x_1, x_2) = u_{01}(x_1, x_2), \quad u_2(t_0, x_1, x_2) = u_{02}(x_1, x_2). \quad (8)$$

Введём в рассмотрение матрицу $B(t, \omega) = (B_{ij})_{i,j=1,2}$,

$$\begin{aligned} B_{i1} = & \begin{pmatrix} a_{i9}(t) - a_{i1}(t)\omega_1^2 - a_{i2}(t)\omega_2^2 & -a_{i5}(t)\omega_1 - a_{i6}(t)\omega_2 \\ a_{i5}(t)\omega_1 + a_{i6}(t)\omega_2 & a_{i9}(t) - a_{i1}(t)\omega_1^2 - a_{i2}(t)\omega_2^2 \end{pmatrix}, \\ B_{i2} = & \begin{pmatrix} a_{i10}(t) - a_{i3}(t)\omega_1^2 - a_{i4}(t)\omega_2^2 & -a_{i7}(t)\omega_1 - a_{i8}(t)\omega_2 \\ a_{i7}(t)\omega_1 + a_{i8}(t)\omega_2 & a_{i10}(t) - a_{i3}(t)\omega_1^2 - a_{i4}(t)\omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Достаточное условие устойчивости даётся следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть справедливы следующие условия:

- 1) функции $a_{ij}(t)$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 10}$ непрерывны по переменной t ;
- 2) при любых фиксированных значениях (t, ω_1, ω_2) , $t \geq t_0$, $-\infty < \omega_i < \infty$, $i = 1, 2$ логарифмическая норма матрицы $B(t, \omega)$, вычисляемая по формуле (1), удовлетворяет неравенству $\Lambda(B(t, \omega)) < -\alpha(\omega_1, \omega_2)$, где $\alpha(\omega_1, \omega_2) > 0$.

Тогда тривиальное решение задачи Коши (6)–(8) устойчиво.

В статье [4] рассматривается следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n A^{(j,k)}(t) {}_{-\infty}D_{x_k}^{\nu_j} u + B(t)u, \quad (9)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad (10)$$

где

$$A^{(j,k)}(t) = (a_{p,q}^{(j,k)}(t)), \quad B(t) = (b_{p,q}(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, l}, \quad q = \overline{1, l},$$

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_l(t, x))^T, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Обозначим

$$\Phi(t, \omega) = (\varphi_{p,q}(t, \omega)) = \left(b_{p,q}(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{p,q}^{(j,k)}(-i\omega_k)^{\nu_j} \right), \quad \text{где } p = \overline{1, l}, \quad q = \overline{1, l}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функции $a_{p,q}^{(j,k)}(t)$, $b_{p,q}(t)$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, l}$, $q = \overline{1, l}$ непрерывны при $t \geq t_0$;

- 2) при всяком фиксированном наборе значений $(t, \omega) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^l$ логарифмическая норма $\Lambda(\Phi(t, \omega))$, вычисляемая по формуле

$$\Lambda(\Phi(t, \omega)) = \operatorname{Re}(\varphi_{p,q}(t, \omega)) + \sum_{\substack{p=1, \\ p \neq q}}^l |\varphi_{p,q}(t, \omega)|,$$

удовлетворяет неравенству $\Lambda(\Phi(t, \omega)) \leq -\sigma$, $\sigma > 0$.

Тогда тривиальное решение уравнения (9) устойчиво в смысле Ляпунова.

В качестве простейшего примера применения теоремы 3 в [4] выводится достаточный критерий устойчивости тривиального решения задачи Коши для следующей системы.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11}(t) \cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{11}} u_1 + a_{12}(t) \cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{12}} u_2 + b_{11}(t) u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21}(t) \cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{11}} u_1 + a_{22}(t) \cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{12}} u_2 + b_{22}(t) u_2. \end{cases} \quad (11)$$

Матрица $\Phi(t, \omega)$ имеет вид

$$\Phi(t, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) + a_{11}(t)(-i\omega)^{\nu_{11}} & a_{12}(t)(-i\omega)^{\nu_{12}} \\ a_{21}(t)(-i\omega)^{\nu_{21}} & b_{22}(t) + a_{22}(t)(-i\omega)^{\nu_{22}} \end{pmatrix}.$$

Применение к системе (11) теоремы 3 приводит к следующему условию устойчивости решения системы (11).

Теорема 4. Пусть имеют место условия:

1) функции $a_{p,q}(t)$, $b_{1,1}(t)$, $b_{2,2}(t)$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$ непрерывны при $t \geq t_0$;

2) при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} b_{11}(t) + a_{11}(t)|\omega|^{\nu_{11}} \cos\left(\frac{\pi\nu_{11}}{2}\right) + |a_{21}(t)| \cdot |\omega|^{\nu_{21}} < -\sigma, \\ b_{22}(t) + a_{22}(t)|\omega|^{\nu_{22}} \cos\left(\frac{\pi\nu_{22}}{2}\right) + |a_{12}(t)| \cdot |\omega|^{\nu_{12}} < -\sigma. \end{cases}$$

Тогда тривиальное решение системы (11) устойчиво в смысле Ляпунова.

Разработанный подход к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в частных производных оказался эффективен и при исследовании решений систем дифференциальных уравнений на неустойчивость по Тьюрингу. Приведём её определение.

Стационарное решение $u_k^0(t, x)$, $k = 1, 2$, системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = g_1(t, u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = g_2(t, u_1, u_2) \end{cases} \quad (12)$$

при не зависящих от пространственных координат начальных значениях

$$u_k(t_0, x) = u_{0k}, \quad k = 1, 2,$$

определённое в области $\Omega = \{(t, x) : (t_0, \infty) \times [a, b]\}$, является устойчивым по Тьюрингу, если для любого положительного ε найдётся такое $\Delta(\varepsilon)$, что при выполнении неравенства $|\delta_{jk}| \leq \Delta$, $j, k = 1, 2$ решение

$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$ задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = g_1(t, u_1, u_2) + \delta_{11} \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} + \delta_{12} \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = g_2(t, u_1, u_2) + \delta_{21} \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} + \delta_{22} \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (13)$$

$$u_k(t_0, a) = u_{0k}^a, \quad u_k(t_0, b) = u_{0k}^b, \quad \frac{\partial u_k(t, a)}{\partial x} = \frac{\partial u_k(t, b)}{\partial x} = 0,$$

$k = 1, 2, a \leq x \leq b$, удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty, x \in [a, b]} |u_k(t, x) - u_k^0(t, x)| \leq \varepsilon.$$

В обратном случае решение системы (14) называется устойчивым по Тьюрингу.

В работе авторов [5] рассматривается система

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + g_1(t, u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + g_2(t, u_1, u_2), \end{cases} \quad (14)$$

$$u_1(t_0, x) = u_{01}, \quad u_2(t_0, x) = u_{02}, \quad u_{0i} = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть справедливы условия:

1) логарифмическая норма $\Lambda(\Psi(t, \omega))$ матрицы

$$\Psi(t, \omega) = (\psi_{jk}(t, \omega)) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) - \delta_{11}\omega^2 & a_{12}(t) - \delta_{12}\omega^2 \\ a_{21}(t) - \delta_{21}\omega^2 & a_{22}(t) - \delta_{22}\omega^2 \end{pmatrix},$$

вычисляемая по формуле (1), на множестве значений $\omega \in \mathbb{R}$ и при $t \geq t_0$ ограничена сверху числом $-\gamma$, где γ – положительное число;

2) функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$ непрерывны при $t \geq t_0$, причём их значения принадлежат интервалу $(a_{jk}(T) - \varepsilon_{jk}, a_{jk}(T) + \varepsilon_{jk})$, $\varepsilon_{jk} \geq 0$ при $T \leq t \leq T + \Delta t$, где $T \geq t_0$ – любое, а значения Δt и ε_{jk} определяются из неравенства

$$2e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{2(\beta + \varepsilon)^2}{\gamma}\right)\Delta t} < 1, \quad \varepsilon = \max_{j, k} \varepsilon_{jk};$$

3) функции $h_1(t, v_1, v_2)$, $h_2(t, v_1, v_2)$ непрерывны по всем переменным $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi$;

4) вектор-функция $h(t, v) = (h_1(t, v_1, v_2), h_2(t, v_1, v_2))^T$ удовлетворяет неравенству $\|h(t, v)\|_2 \leq \beta \|v\|_2$, причём β , γ и ε связаны неравенством $\beta + \varepsilon < \gamma/2$.

Тогда решение $u^*(t)$ задачи (14)-(15) устойчиво по Тьюрингу.

Приведённая теорема 5 в той же работе обобщена на случай устойчивости по Тьюрингу системы уравнений (14), которая при исследовании возмущается производными дробных порядков. Соответствующая исходной системе (14) возмущённая система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + g_1(t, u_1, u_2) + \delta_{11} \frac{\partial^\nu u_1}{\partial x^\nu} + \delta_{12} \frac{\partial^\nu u_2}{\partial x^\nu}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + g_2(t, u_1, u_2) + \delta_{21} \frac{\partial^\nu u_1}{\partial x^\nu} + \delta_{22} \frac{\partial^\nu u_2}{\partial x^\nu}. \end{cases} \quad (16)$$

$$u_1(t_0, x) = u_{01} + \tilde{u}_{01}, \quad u_2(t_0, x) = u_{02} + \tilde{u}_{02}. \quad (17)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполняются условия:

1) логарифмическая норма матрицы $\Psi(t, \omega) = (\Psi_{jk}(t, \omega))_{j,k=1,2}$,

$$\Psi_{jk}(t, \omega) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + \delta_{11}|\omega|^\nu \cos(\pi\nu/2) & \delta_{12}|\omega|^\nu \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\pi\nu/2) \\ -\delta_{21}|\omega|^\nu \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\pi\nu/2) & a_{22}(t) + \delta_{22}|\omega|^\nu \cos(\pi\nu/2) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

вычисляемая по формуле (1), на множестве значений $\omega \in \mathbb{R}$ и $t \in [t_0, \infty)$ ограничена сверху числом $-\gamma$, где $\gamma > 0$;

2) функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$ непрерывны при $t \geq t_0$, причём их значения принадлежат интервалу $(a_{jk}(T) - \varepsilon_{jk}, a_{jk}(T) + \varepsilon_{jk})$, $\varepsilon_{jk} \geq 0$, при $T \leq t \leq T + \Delta t$, где $T \geq t_0$ – любое, а значения Δt и ε_{jk} определяются из неравенства

$$2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)\Delta t} < 1, \quad \varepsilon = \max_{j,k} \varepsilon_{jk};$$

3) функции $h_1(t, v_1, v_2), h_2(t, v_1, v_2)$ непрерывны по всем переменным;

4) вектор-функция $h(t, v) = (h_1(t, v), h_2(t, v))^T$ удовлетворяет неравенству $\|h(t, v)\|_2 \leq \beta \|v\|_2$,

причём постоянные β и γ связаны неравенством

$$\beta + \varepsilon < \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда решение u^* задачи (16)–(17) устойчиво по Тьюрингу.

На взгляд авторов, большой интерес представляет дальнейшее развитие предложенного подхода и распространение его на новые классы уравнений, в частности, на дифференциальные уравнения с частными производными дробных порядков по переменной t .

Библиографический список

1. Бойков, И. В. Критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2012. – № 3. – С. 12–20.
2. Бойков, И. В. О достаточных критериях устойчивости решений дифференциальных уравнений гиперболического типа / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 33–49.
3. Бойков, И. В. Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 84–100.
4. Рязанцев, В. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с производными дробного порядка / В. А. Рязанцев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – № 1. – С. 141–147.
5. Бойков, И. В. Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – № 4. – С. 15–24.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. В. Кормишина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: lera.2695@bk.ru

Введение

В самых разнообразных областях современной науки и техники часто приходится встречаться с математическими задачами, для которых

невозможно получить точное решение классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, которое неудобно для практического использования. Многие из задач математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными.

Подобные дифференциальные уравнения описывают, в частности, процессы теплообмена. Так как теплообмен определяется не только тепловыми, но и гидродинамическими явлениями, то совокупность этих явлений описывается системой дифференциальных уравнений. В простейшем случае уравнение параболического типа имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

где $u = u(x, t), t \in R, x \in R^n, \Delta$ – оператор Лапласа по x , $a > 0$.

Этому уравнению подчиняется температура однородной и изотропной среды, кроме того, ему удовлетворяет плотность диффундирующего вещества, например, плотность броуновских частиц в случае, когда частиц достаточно много, так что мы можем говорить об их плотности и об изменении этой плотности как о непрерывном процессе. Поэтому уравнение теплопроводности часто называют также уравнением диффузии. В данной статье представлен обзор методов решения параболических уравнений в частных производных.

Метод Галеркина

Рассмотрим решение начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения методом Галеркина.

Требуется в двумерной области

$$D = \{(x, t) \in R^2; a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$L[u(x, t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x, t)u = g(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее двум краевым (граничным) условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

где $K(x, t), K'_x(x, t), \beta(x, t), g(x, t), a_2(t), b_2(t)$ – заданные, непрерывные на D функции ($K(x, t) > 0$); a_0, a_1, b_0, b_1 – заданные действительные числа, причем $a_0^2 + a_1^2 > 0, b_0^2 + b_1^2 > 0$; $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе с $f'(x)$ и такая, что

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0). \end{cases} \quad (4)$$

Для того чтобы найти приближенное решение задачи (1)–(4), строится функциональная последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ из пробных решений $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x) \quad (5)$$

с неизвестными пока функциями $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$, зависящими только от аргумента t .

Подставляя $u_n(x, t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение (1) получаем невязку

$$\begin{aligned} R_1(v_1, \dots, v_n, x, t) = & \sum_{k=1}^n u_k \frac{dv_k}{dt} - \sum_{k=1}^n \left(K u_k'' + \frac{\partial K}{\partial x} u_k' + \beta u_k \right) v_k - \\ & - \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Подставляя $u_n(x, 0)$, полученную из (5) при $t = 0$, в (3), находим невязку

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_n(x, 0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x). \quad (6)$$

Невязки R_1 и R_2 являются характеристиками отклонения функции (5) от точного решения $U(x, t)$ задачи (1)–(4). Во всяком случае, если при некотором наборе функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$ $R_1 \equiv 0$ и $R_2 \equiv 0$, то функция $u_n(x, t)$ из (5) – точное решение $U(x, t)$.

В общем случае эти невязки оказываются отличными от нуля, поэтому необходимо выполнение дополнительных условий на функции $v_k(t)$ и их начальные значения $v_k(0)$ таких, чтобы невязки в каком-то смысле были бы наименьшими.

Если рассматривать обобщенный метод Галеркина, то эти условия будут определяться системой уравнений:

$$R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, k = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x), w_k(x)) = 0, k = \overline{1, n}; \quad (8)$$

где $w_1(x), \dots, w_n(x)$ – заданные линейно независимые на $[a, b]$ поверочные функции и

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x), W(x) dx.$$

В развернутом виде и после преобразований условия (7) принимают следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj}(t) v_j = b_k(t), \quad k = \overline{1, n}; \quad (9)$$

где

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x), w_k(x) dx, \quad (10)$$

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (K u_j') + \beta u_j, w_k \right) = \int_a^b (K u_j'' + \frac{\partial K}{\partial x} u_j' + \beta u_j) w_k dx, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} b_k(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k(x) \right) = \\ &= \int_a^b \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k dx, \quad k = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$A = (a_{kj})_n, C = (c_{kj})_n, B = (b_k)_{n,1}, V = (v_j)_{n,1},$$

то система (9) запишется в матричном виде таким образом:

$$A \frac{dV}{dt} = CV + B. \quad (13)$$

Теперь из (13) получаем

$$\frac{dV}{dt} = A^{-1}(CV + B). \quad (14)$$

Запишем теперь в развернутом виде условия (8). Прделав несколько шагов, получаем

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (15)$$

где a_{kj} определяются формулами (10), а

$$d_k = (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0(x, 0)) w_k(x) dx,$$

Если ввести матрицу $D = (d_k)_{n,1}$, то из (14) получаем

$$V(0) = A^{-1}D. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения функций $V_k(t), k = \overline{1, n}$, определяющих пробное решение (5), получаем задачу Коши для нормальной системы (14) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -ого порядка с начальными условиями (16). Решив указанную задачу Коши и подставив определяемые этим решением функции $v_k(t)$ в (5), заканчиваем построение пробного решения $u_n(x, t)$.

Вариационный метод

Среди приближенных методов решения уравнений в частных производных значительное место занимают вариационные методы. В некоторых областях механики эти методы являются самыми распространенными.

Вариационный метод основан на возможности приближенной минимизации функционала, которым служит так называемый интеграл Дирихле

$$I(\rho) = \int_{(\Omega)} (grad \rho)^2 d\Omega = \int_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (17)$$

В [3] сделан вывод о том, что неоднородное граничное условие 2-ого рода

$$\chi \frac{d\rho}{dn} \Big|_{P \text{ на } (S)} = \psi(P)$$

для функционала (17) не выдерживает перехода к пределу при $\rho_h(x) \rightarrow 0$ и заменяется в последнем на соответствующее однородное граничное условие, которому отвечает решение $\rho \equiv Const$.

Однако если видоизменить постановку вариационной задачи, получится решение, удовлетворяющее условиям $\rho'(0) = 1, \rho'(1) = 1$. Именно, рассмотрим функционал:

$$I[\rho] = \int_0^1 \rho'^2 dx + 2\rho(0) - 2\rho(1) \quad (18)$$

на множестве всех функций. Такая вариационная задача без граничных условий называется естественной. Если на какой-либо функции $\bar{\rho}(x)$ функционал (18) принимает стационарное значение, то

$$\delta I = \int_0^1 2\bar{\rho}' \delta \rho' dx + 2\delta \rho(0) - 2\delta \rho(1) = 0.$$

Интегрируя полученный интеграл по частям, приходим к равенству

$$-2 \int_0^1 \bar{\rho}'' \delta \rho dx + \left[2 - 2\bar{\rho}'(0) \right] \delta \rho(0) + [2\bar{\rho}'(1) - 2] \delta \rho(1) = 0.$$

Отсюда, учитывая полную произвольность функции $\delta \rho(x)$, в частности, значений $\delta \rho(0)$ и $\delta \rho(1)$, получаем, что $\bar{\rho}(x)$ удовлетворяет уравнению $\bar{\rho}'' = 0$ и граничным условиям (18).

Таким образом, решение этой задачи автоматически удовлетворяет определенным граничным условиям, которые можно вывести из этой постановки. Вариационный метод можно применить также для отыскания собственных значений решений, экспоненциальных во времени. Остановимся на случае, когда решения строятся в конечной пространственной области (Ω) с граничным условием

$$\rho|_{(S)} = 0, \quad (19)$$

где (S) – граница области (Ω) .

После разложения произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей этому условию, в ряд по собственным функциям $f_m(x)$, и некоторых преобразований, получаем:

$$\int_{(\Omega)} (\nabla f)^2 d\Omega = \sum_m \lambda_m C_m^2 \int_{(\Omega)} f_m^2 d\Omega. \quad (20)$$

Таким образом,

$$\lambda_{min} = \min_f \left[\int_{(\Omega)} (\nabla f)^2 d\Omega / \int_{(\Omega)} f^2 d\Omega \right], \quad (21)$$

причем минимум берется среди всех функций, удовлетворяющих граничному условию (19). Минимум реализует собственная функция, отвечающая λ_{min} .

Применение полученного вариационного принципа (21) осуществляется с помощью метода Ритца. Имеются методы нахождения и дальнейших собственных значений, но чаще всего отыскивают наименьшее, так как именно оно играет важнейшую роль.

Из данного вариационного принципа вытекает, в частности, монотонная зависимость наименьшего собственного значения λ_{min} от области (Ω) .

Пусть $f^{(1)}(x)$ – собственная функция, определенная в $(\Omega)^{(1)}$ и отвечающая собственному значению $\lambda_{min}^{(1)}$. Тогда, в силу сказанного выше,

$$\int_{(\Omega)^{(1)}} (\nabla f^{(1)})^2 d\Omega / \int_{(\Omega)^{(1)}} f^{(1)2} d\Omega = \lambda_{min}^{(1)}.$$

Определим функцию $F(x)$ в $(\Omega)^{(2)}$, положив ее равной $f^{(1)}(x)$ на $(\Omega)^{(1)}$ и нулю на остальной части $(\Omega)^{(2)}$. Функция F , очевидно, не является собственной, поэтому в силу принципа (5)

$$\lambda_{min}^{(2)} < \int_{(\Omega)^{(2)}} (\nabla F)^2 d\Omega / \int_{(\Omega)^{(2)}} F^2 d\Omega.$$

Однако правая часть этого неравенства равна левой части предыдущего неравенства, т.е. $\lambda_{min}^{(2)} < \lambda_{min}^{(1)}$, что и требовалось доказать.

Полученное свойство имеет очевидный физический смысл. Оно означает, что если область была разогрета, а после этого на границе области поддерживается нулевая температура, то область $(\Omega)^{(1)}$ будет охлаждаться быстрее, чем $(\Omega)^{(2)}$.

Библиографический список

1. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева / Глав. ред. физ.-мат. лит-ры изд-ва «Наука», 1967. – 736 с.
2. Анкилов, А. В. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок : учеб. пособие / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семенов; под общ. ред. П. А. Вельмисова. – 2 изд. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 179 с.
3. Зельдович, Я. Б. Элементы математической физики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис / Глав. ред. физ.-мат. Лит-ры изд-ва «Наука», 1973. – 351 с.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В МУЛЬТИПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

И. А. Абрамов, Е. Н. Симакова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: igora379@gmail.com, sop64@mail.ru

Цифровые изображения занимают все большую часть информационного мира. Если цифровые изображения необходимо обозревать или обрабатывать при различных увеличениях и разрешениях, то для этих целей чрезвычайно удобно использовать дискретное вейвлетное преобразование. Помимо того, что вейвлетное преобразование, будучи весьма эффективным и интуитивно понятным инструментом для представления и хранения кратномасштабных изображений, оно обеспечивает глубокое проникновение к основным пространственным и частотным характеристикам изображений.

С математической точки зрения изображение представляет собой двумерный массив значений яркости с локально зависимыми статистиками, что обусловлено различным сочетанием характерных резких деталей, таких как контуры и контрастные однородные области. Как правило, обрабатываемые изображения имеют большой объем, и актуальной становится проблема ускорения процесса обработки.

Одним из основных способов ускорения выполнения подобных вычислений может стать их распараллеливание, при этом в качестве аппаратного обеспечения, в связи с их доступностью, могут быть выбраны мультипроцессорные системы с общей памятью.

Идея вейвлет-сжатия изображений достаточно проста. После применения вейвлет-преобразования некоторые коэффициенты удаляются из данных преобразованного изображения, а к остальным может применяться кодирование.

В двумерном случае используют двумерную масштабирующую функцию $\phi(x, y)$ и двумерные вейвлет функции $\Psi^H(x, y)$, $\Psi^V(x, y)$, $\Psi^D(x, y)$ [1].

Каждую из функций можно получить произведением одномерной масштабирующей функции и соответствующей вейвлет-функции. Ис-

ключаем произведения, приводящие к «одномерным результатам» типа $\varphi(x)\Psi(x)$ и получаем разделимую масштабирующую функцию

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

и «направленные» разделимые вейвлет-функции

$$\Psi^H(x, y) = \Psi(x)\varphi(y), \quad \Psi^V(x, y) = \varphi(x)\Psi(y), \quad \Psi^D(x, y) = \Psi(x)\Psi(y).$$

Данные вейвелеты служат для измерения вариации значений функции (изменения яркости) по трем направлениям: Ψ^H – отвечает за изменения вариаций вдоль столбцов, Ψ^V – отвечает за изменения вариаций вдоль строк, Ψ^D – отвечает за изменения вариаций вдоль диагоналей.

В двумерном случае, прежде всего, необходимо определить семейство базисных функций. Это можно сделать с помощью операций сдвигов и изменений масштаба

$$\varphi_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - m, 2^j y - n),$$

$$\Psi^i_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \Psi^i(2^j x - m, 2^j y - n), \quad i = \{H, V, D\},$$

причем верхний индекс необходим для идентификации направленных вейвелетов.

Далее для функции $f(x, y)$ размерами $M \times N$ необходимо определить дискретное вейвлет-преобразование

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y),$$

$$W^i_\Psi(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \Psi^i_{j, m, n}(x, y), \quad i = \{H, V, D\},$$

где j_0 – произвольный начальный масштаб; $W_\varphi(j_0, m, n)$ – коэффициенты определяющие приближение функции $f(x, y)$ в масштабе j_0 ; $W^i_\Psi(j, m, n)$ – коэффициенты определяющие горизонтальные, вертикальные и диагональные детали для масштабов $j \geq j_0$.

С помощью операций фильтрации и прореживающей выборки можно реализовать двумерное дискретное вейвлет-преобразование. Так как используемые функции являются разделимыми, то сначала необходимо вычислить одномерное быстрое вейвлет-преобразование по строкам от функции $f(x, y)$, а потом по столбцам от полученного результата [1].

Одномасштабный блок фильтров может применяться повторно. Коэффициенты приближения блока фильтров на выходе нужно подать

на вход следующему блоку фильтров. Результатом будет являться P -масштабное, где масштаб $j = J - 1, J - 2, \dots, J - P$. Изображение $f(x, y)$ используется на входе в качестве коэффициентов $W_\phi(J, m, n)$.

Далее происходит свертка строк изображения с последовательностями $h_\phi(J, m, n)$, $h_\phi(-n)$ и прореживание столбцов полученного результата. После получаются две части изображения, которые имеют уменьшенное в двое разрешение по горизонтали. Высоочастотную составляющую изображения в вертикальном направлении характеризует высокочастотная часть (детальная) [3]. Информация о низких частотах в вертикальном направлении содержится в низкочастотной части (в приближении). Затем к этим частям применяется процедура фильтрации по столбцам и прореживание [2]. В результате будут получены четыре части исходного изображения, каждое из которых вдвое меньше исходного: $W_\phi, W_\psi^H, W_\psi^V, W_\psi^D$ в соответствии с рис. 1.

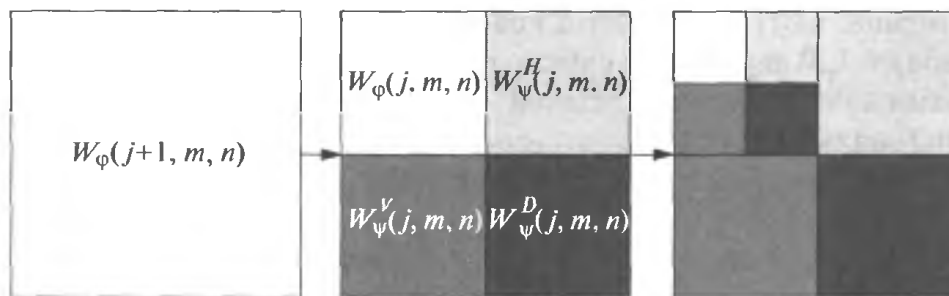


Рис. 1. Получаемое разложение

Вейвлет-преобразование изображения требует выполнения множества однотипных операций, что свидетельствует о наличии параллелизма по данным. Тогда распараллеливание может свестись к распределению данных между потоками, каждый из которых сможет независимо выполнить преобразование своей части изображения. Для этого исходное изображение следует разбить на горизонтальные полосы и выделить каждому потоку некоторое подмножество строк.

Рассматриваемый алгоритм обладает хорошей «локализацией вычислений», то есть каждый поток использует данные только выделенной ему полосы, между потоками отсутствует обмен данными и не возникает необходимость в синхронизации доступа к данным.

Разработанная многопоточная программа вейвлет-преобразования выполняет загрузку изображения из графического файла, запуск группы потоков, которые обрабатывают свою часть изображения, и после завершения работы потоков записывает преобразованное изображение в новый графический файл [4].

Многопоточная программа была реализована на языке C++ и скомпилирована с помощью компилятора gcc 5.2.0. Эксперименты с программой проводились на компьютере на базе процессора Intel Core i7, 3,5 ГГц, 8 Гб ОЗУ под управлением операционной системы Ubuntu 16.04. В эксперименте были исследованы однопоточный, двухпоточный, трёхпоточный и четырёхпоточный варианты выполнения программы.

В процессе эксперимента были обработаны изображения размерами 800×600, 1024×768, 1280×1024, 1920×1200, 3840×2160. Результаты вычислительных экспериментов вейвлет-преобразования изображения приведены в табл. 1 и в графическом виде представлены на рис. 2. Время выполнения фильтрации указаны в миллисекундах.

Таблица 1

Результаты вычислительных экспериментов вейвлет-преобразования изображения

Размер изображения	Последовательный алгоритм, время	Параллельный алгоритм					
		2 потока		3 потока		4 потока	
		Время, мс	Ускорение	Время, мс	Ускорение	Время, мс	Ускорение
800×600	14	16,01	0,87	12	1,2	10,3	1,36
1024×768	23,1	25,23	0,92	18,01	1,3	16,3	1,42
1280×1024	39,23	39,03	1,01	30,01	1,311	24,62	1,59
1920×1200	71,55	66,54	1,08	50,03	1,43	40,83	1,75
3840×2160	349,16	251,67	1,39	176,85	1,97	136,8	2,55

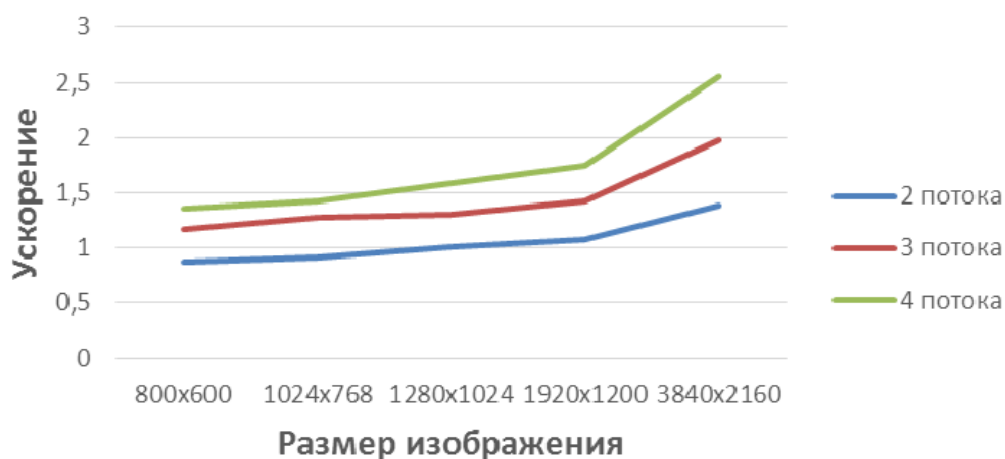


Рис. 2. Зависимость ускорения вейвлет-преобразования от размера изображения

Как видно из представленных результатов, максимальное ускорение программы достигается при преобразовании изображения размером 3840x2160. При обработке изображения размером 800×600 ускорение, достигаемое при использовании четырёх потоков, отсутствует, а в слу-

чаях двух и трёх потоков, здесь наблюдается лучшая эффективность последовательного варианта программы. Такие результаты являются следствием большой доли временных затрат на организацию параллелизма по отношению ко времени вычислений. С увеличением размеров изображения число вычислительных операций возрастает и дополнительные накладные расходы в меньшей мере вносят вклад в общее время выполнения программы, при этом больше проявляется эффект от параллельного выполнения вейвлет-преобразования.

Библиографический список

1. Уэлстид, С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии : учеб. пособие / С. Уэлстид. – М. : Триумф, 2003. – 320 с.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
3. Сэломон, Д. Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон. – М. : Триумф, 2004. – 368 с.
4. Уильямс, Э. Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ / Э. Уильямс; пер. с англ. А. А. Слинкин – М. : ДМК Пресс, 2012 – 672 с.

ПОШАГОВОЕ УТОЧНЕНИЕ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ.

Е. Н. Гомзева, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

В настоящее время задача аппроксимации является актуальной темой практически для каждого технического исследования. От выбора вида аппроксимации в существенной мере зависят количественные характеристики и качественные свойства описания изучаемых объектов.

Аппроксимация (от лат. *approximo* – приближаюсь) – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным [1]. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики или качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны) [1]. Приближение – то же, что аппроксимация, термин «приближение» иногда употребляется в смысле приближающего объекта [1].

Модель (фр. *modele*, от лат. *modulus* – мера, образец) – любой образ какого-либо объекта, процесса или явления («оригинала» данной

модели), используемый в качестве его «заместителя, «представителя» [2]. Математическая модель – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики [1]. Физическая модель – приближенное описание некоторого объекта или явления с помощью образа, имеющего ту же физическую природу [3].

Одним из важных этапов изучения явления с помощью его математической модели является выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетическая модель критерию практики, то есть выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. В связи с этим необходима проверка на адекватность (соответствие свойствам реального объекта) данной математической модели, причем точность модели, должна быть больше точности наблюдений (ошибка модели должна быть меньше ошибки наблюдений).

Условно аппроксимацию можно разделить на два вида:

- 1) строгая теория математической аппроксимации;
- 2) физическая (техническая) аппроксимация.

Строгая теория математической аппроксимации включает в себя следующие методы аппроксимации:

- 1) полиномами (многочленами);
- 2) сплайнами;
- 3) отрезками ряда Фурье;
- 4) полиномами по ортогональным многочленам;
- 5) собственными функциями краевых задач.

Менее строгая аппроксимация – физическая (техническая) аппроксимация или математическая модель физического явления, процесса (физической модели), технического устройства (его характеристик), сигнала (его параметров), среды, материи и т. п. Физическая (техническая) аппроксимация включает в себя множество способов аппроксимации и аппроксимирующих функций, выбираемых исходя из конкретно поставленной физической (технической) задачи.

Таким образом, с помощью физической (технической) аппроксимации оперативно решается широкий круг задач, актуальных на данный момент времени, связанных с конкретными проблемами и вопросами прикладного (технического) характера.

Рассмотрим одно из возможных направлений технической аппроксимации – пошаговое уточнение спутниковых снимков различных поверхностей нашей планеты.

Компьютерная обработка снимков, представленных в цифровом виде, открывает новые технические возможности для их дешифрирования. Специальные пакеты программ, такие как использованный при подготовке этой работы ERDAS Imagine, позволяют выводить снимок на

экран монитора, улучшать качество снимка (например, убирать влияние атмосферной дымки), синтезировать цветные изображения, выполнять автоматизированное дешифрирование, получать количественные данные (координаты, расстояния, площади и т. д.). Цифровые снимки также могут быть получены при съемке сканирующими системами с аэро- или космических носителей, таких как например российские спутники Ресурс, французские SPOT или американские Landsat.

Цифровой снимок состоит из элементов, пикселей, образующих сетку из строк и столбцов. Каждый пиксел имеет свои координаты и характеризуется яркостью, которая обозначается в условных единицах (обычно от 0 до 255 усл.ед.). Как вариант – можно использовать RGB-формат, т.е. учитывать цветовые составляющие каждого пиксела, каждая из которых хранится в отдельной матрице.

Предположим, что некоторые внешние обстоятельства мешают более детальным съемкам того или иного ландшафта, однако, результаты более крупной съемки у нас есть и, более того, они переведены в цифровой формат.

Тогда, рассматривая каждое изображение как некоторую дискретную функцию, зависящую от 3-х переменных, можно с достаточной степенью точности восстановить недостающую информацию на основе методов теории математической аппроксимации. В частности, в данной работе будем применять полиномиальную аппроксимацию. Для функции трех переменных она имеет вид

$$L(x) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^J f(x_n, y_m, z_j) l_{nmj}(x, y, z)$$

где базисные полиномы $l_{nmj}(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = n, y = m, z = j \\ 0, & \text{при } x \neq n \cup y \neq m \cup z \neq j \end{cases}$

будем вычислять по следующей формуле:

$$l_{nmj}(x, y, z) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^N \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^M \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^J \frac{(x - x_i)(y - y_k)(z - z_p)}{(x_n - x_i)(y_m - y_k)(z_j - z_p)}$$

Помимо этого, будем использовать информацию о геометрическом соседстве точек изображения для присвоения им согласованных меток на основе ненадежных данных, формируемых датчиками изображения. В конце постобработки формируется некоторая улучшенная граница изображения, элементы которой первоначально определяются с помощью соответствующего граничного оператора.

Предположим, что для выделения элементов границы используется множество меток, которые фиксируют наличие границы и ее направ-

ление. Одна из возможностей состоит в использовании кода Фримэна со значениями, лежащими в диапазоне от 0 до 7 (0 обозначает восточное направление, 1 – северо-восточное и т.д.). При этом используется некоторое соглашение о направлении границы и о положении объекта, например, слева от границы. Кроме этого, применяется специальная метка, обозначающая отсутствие границы (рис. 1).

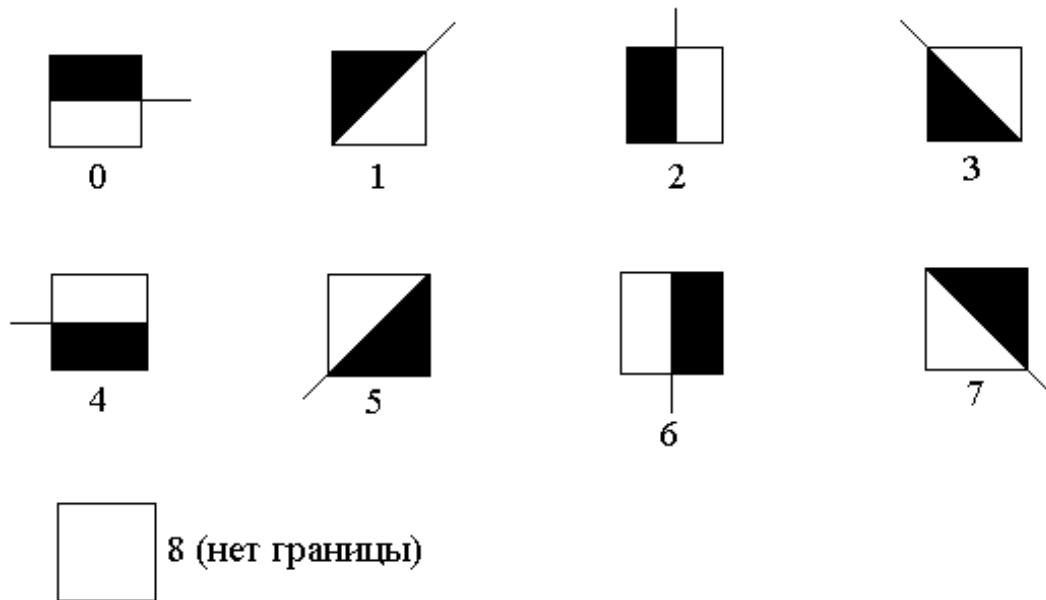


Рис. 1. Метки пикселей в соответствии с кодом Фримэна

Инициализация выполняется так, чтобы с каждым элементом границы (пикселем) были связаны все 9 меток с суммарной относительной силой (вероятностью), равной 1. Распределение значений меток для каждого элемента определяется выходными значениями датчиков границ, которые настраиваются так, чтобы ни одна метка не получила нулевой вероятности с целью исключения бесконечного итерационного процесса. Начальная нормализация выполняется по отношению к датчику границ, на выходе которого формируется наибольшее значение

Библиографический список

1. Математика: Энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003.
2. Ахиезера, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезера. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
3. Тихомиров, В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
4. Корейчук, Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корейчук. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВИДОВ МНОГОЧЛЕНОВ

А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов, Р. К. Галимова

Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А. Н. Туполева – КАИ,
г. Казань, Россия

E-mail: nastya.98.ru.2014@yandex.ru , lutin.roma@mail.ru , zymat@bk.ru

Рассмотрим полиномиальную формулу [1–6]:

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \\ & = \sum_{\substack{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) \\ n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \cdot a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n, k \in \mathbf{N}$; $n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq k$.

Введём обозначение:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 x^{l_1} + b_2 x^{l_2} + b_3 x^{l_3} \dots + b_k x^{l_k},$$

где $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k \in \mathbf{Z}$, а l_k – это максимальная степень x ($l_i = l_{i-1} + 1$, где $2 \leq i \leq k$), $l_1 \in \mathbf{N}$. При этом степени переменной x расположены по возрастанию.

Заметим, что в статье [1] допущена опечатка. А именно: в примере 9 степень полиномиальной формулы должна быть $n = 5$, а не $n = 4$.

Под «центром записи» многочлена понимается следующее [1-2]:

а) если количество m элементов в полученном многочлене (k элементов в исходном многочлене) – нечетное число, то «центр» – это элемент, находящийся в центре многочлена; его номером будет $\frac{m+1}{2}$

(или $\frac{k+1}{2}$);

б) если количество m элементов в полученном многочлене (k элементов в исходном многочлене) – четное число, то «центр» – это пространство между элементами под номерами $\frac{m}{2}$ (или $\frac{k}{2}$) и $\frac{m}{2} + 1$ (или $(\frac{k}{2} + 1)$).

В статье [1] в третьем выводе отмечается: если в исходном многочлене есть отрицательные коэффициенты, и взят другой многочлен с теми же коэффициентами, но отраженными относительно «центра записи»

си», причем степени x остаются на своих местах, то коэффициенты при переменных, полученных из решения первого многочлена, также отражаются относительно «центра» во втором полученном полиноме.

Добавим, что эта же закономерность наблюдается как при нечётном числе элементов в исходном многочлене, так и при чётном.

Далее рассмотрим произвольные многочлены (с некоторой закономерностью или же без неё).

Исследуем более подробно полиномы, для которых в исходных многочленах коэффициенты при одной или нескольких степенях x равны нулю. Начнём с примеров, которые имеют чётную максимальную степень l_k . Сначала запишем полный исходный многочлен (со всеми степенями x) с симметрией коэффициентов относительно «центра записи».

Пример 1:

$$(3 + x + 6x^2 + 3x^3 + 6x^4 + x^5 + 3x^6)^3 = 27x^{18} + 27x^{17} + 171x^{16} + 190x^{15} + \\ + 558x^{14} + 576x^{13} + 1170x^{12} + 1056x^{11} + 1665x^{10} + 1287x^9 + 1665x^8 + \\ + 1056x^7 + 1170x^6 + 576x^5 + 558x^4 + 190x^3 + 171x^2 + 27x + 27$$

Теперь уберём элементы с нечётной степенью при x .

Пример 2:

$$(3 + 6x^2 + 6x^4 + 3x^6)^3 = 27x^{18} + 162x^{16} + 486x^{14} + 945x^{12} + 1296x^{10} + \\ + 1296x^8 + 945x^6 + 486x^4 + 162x^2 + 27.$$

В примере 2 мы видим симметрию относительно «центра записи», при этом отсутствуют нечётные степени при x .

Уберём элементы с чётной степенью при x , оставим первый и последний элементы, так как они являются важными компонентами исходного многочлена.

Пример 3:

$$(3 + x + 3x^3 + x^5 + 3x^6)^3 = 27x^{18} + 27x^{17} + 9x^{16} + 82x^{15} + 54x^{14} + \\ + 36x^{13} + 180x^{12} + 84x^{11} + 63x^{10} + 207x^9 + 63x^8 + 84x^7 + \\ + 180x^6 + 36x^5 + 54x^4 + 82x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

В примере 3 прослеживается закономерность примера 2. Однако, в результирующем многочлене находятся все степени x , что объясняется присутствием в исходном многочлене как чётных, так и нечётных степеней.

Проводя вычисления со множеством аналогичных полиномов, можно сделать следующие выводы.

Вывод 1: если исходный многочлен имеет чётную максимальную степень l_k при x и коэффициенты элементов симметричны относительно

«центра записи», а также все элементы имеют чётную степень x , то коэффициенты полученного многочлена будут симметричны относительно «центра записи».

Вывод 2: если максимальная степень исходного многочлена чётная, коэффициенты элементов симметричны относительно «центра записи» и все элементы, кроме первого и последнего, имеют нечётную степень x , то коэффициенты полученного многочлена будут симметричны относительно «центра записи».

Пример 4:

$$(5 + 4x^2 + 2x^4)^3 = 8x^{12} + 48x^{10} + 156x^8 + 304x^6 + 390x^4 + 300x^2 + 125.$$

Выпишем коэффициенты полученного многочлена.

8	48	156	304	390	300	125
3	2	1	центр	1	2	3

$125 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$	$300 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$	$390 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)$				
			390	300	125	

Здесь мы наблюдаем закономерность, которая была описана в статье [2] в выводе 3 с последующей правкой в статье [1].

Вывод 3: если исходный многочлен состоит из трех элементов, степени которых чётные, а $l_k = 4$, то коэффициенты полученного многочлена слева от «центра» можно получить через коэффициенты справа, умноженные на определённые числа. Этими числами являются h^c , где h – это отношение коэффициентов x^{l_k} к x^{l_1} в изначальном многочлене, c – номер места от «центра».

Рассмотрим примеры многочленов, которые имеют нечётную максимальную степень l_k при x .

Сначала запишем полный исходный многочлен (где есть все степени при x) с симметрией коэффициентов относительно «центра записи».

Пример 5:

$$\begin{aligned} (2 + 5x + 3x^2 + x^3 + x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 2x^7)^3 = & 8x^{21} + 60x^{20} + 186x^{19} + 317x^{18} + \\ & + 351x^{17} + 342x^{16} + 474x^{15} + 801x^{14} + 1053x^{13} + 973x^{12} + 759x^{11} + 759x^{10} + \\ & + 973x^9 + 1053x^8 + 801x^7 + 474x^6 + 342x^5 + 351x^4 + 317x^3 + 186x^2 + 60x + 8.. \end{aligned}$$

В следующем примере уберём элементы с чётной степенью при x , кроме свободного члена, так как он является важной компонентой исходного многочлена.

Пример 6:

$$(2 + 5x + x^3 + 3x^5 + 2x^7)^3 = 8x^{21} + 36x^{19} + 66x^{17} + 123x^{15} +$$

$$+24x^{14} + 213x^{13} + 72x^{12} + 204x^{11} + 78x^{10} + 241x^9 + 156x^8 + 254x^7 + \\ + 186x^6 + 111x^5 + 60x^4 + 137x^3 + 150x^2 + 60x + 8.$$

В примере 6 никакой закономерности мы не наблюдаем.

Далее уберём элементы с нечётной степенью при x , кроме последнего, так как он является важной компонентой исходного многочлена.

Пример 7:

$$(2 + 3x^2 + x^4 + 5x^6 + 2x^7)^3 = 8x^{21} + 60x^{20} + 150x^{19} + 137x^{18} + 60x^{17} + \\ + 111x^{16} + 186x^{15} + 264x^{14} + 156x^{13} + 241x^{12} + 78x^{11} + 204x^{10} + 72x^9 + \\ + 213x^8 + 24x^7 + 123x^6 + 66x^4 + 36x^2 + 36x + 8.$$

В примере 7 опять нет никакой взаимосвязи между элементами полученного полинома. Но если сравнить примеры 6 и 7, то можно заметить закономерность, которая была зафиксирована в статье [1] в выводе 3.

Вывод 4: если исходный многочлен имеет нечётную максимальную степень l_k при x и коэффициенты элементов симметричны относительно «центра записи», а также в качестве исходного многочлена взят другой многочлен с теми же коэффициентами, но отраженными относительно «центра записи», причем переменные остаются на своих местах, то коэффициенты при переменных, полученных из решения для первого многочлена, также отразятся относительно «центра» во втором полученном полиноме.

Полиномы рассматриваемых типов могут быть использованы для приближения графиков функций, описывающих различные процессы в таких областях знания, как физика, химия, биология и т.д.

Например, подобного вида многочлены возникают при описании технологии обработки жидкостей парогазовым разрядом с электролитическими электродами [7].

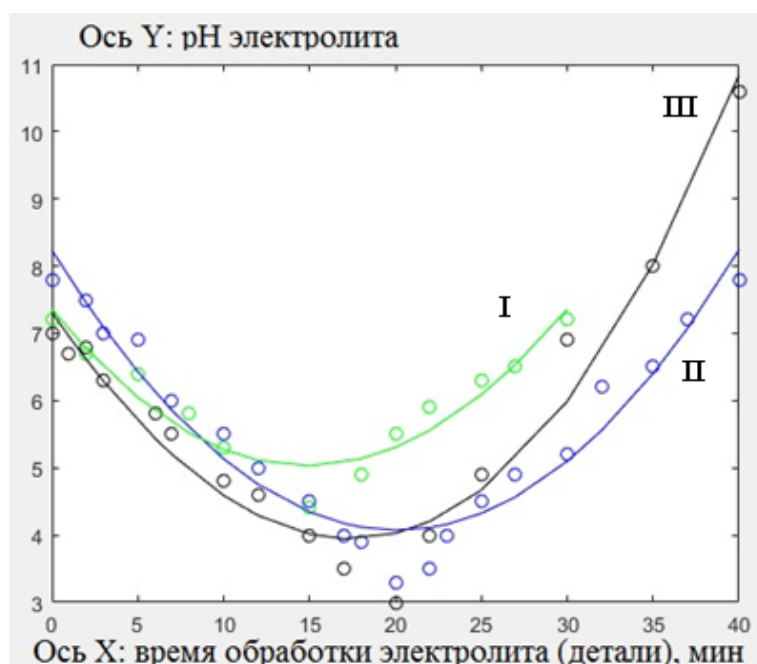
В качестве иллюстрации вышесказанного, на рис. 1 изображены графики полиномиальных функций, получаемых для описания такого рода процессов:

$$y(x) = 0,0111x^2 - 0,3185x + 7,3627; \quad (I)$$

$$y(x) = 0,01x^2 - 0,4115x + 8,2360; \quad (II)$$

$$y(x) = 0,001x^3 + 0,009x^2 - 0,3679x + 7,3117. \quad (III)$$

Эти функциональные зависимости могут быть сведены к многочленам с целыми коэффициентами с помощью корректирующих множителей, например, 10^4 .



Рис/ 1. Изменение кислотности pH электролита в непрерывном технологическом цикле

Среди таких полиномов довольно часто встречаются функции с симметриями коэффициентов относительно «центра записи». И было бы интересно выявить физическую природу такого рода аналитических моделей, а также выяснить роль исходных (базовых) многочленов (как моделей технологических процессов или их отдельных этапов), «порождающих» с помощью полиномиальной формулы результирующие полиномы с определёнными закономерностями (в частности, симметриями) относительно их коэффициентов.

Библиографический список

1. Павлова, А. А. Полиномиальная формула: её закономерности для определённых видов многочленов и области практического применения – 2 / А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов // XII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2017 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 33–39.
2. Павлова, А. А. Полиномиальная формула: её закономерности для определённых видов многочленов и область практического применения / А. А. Павлова, З. Я. Якупов // XXIII Туполевские чтения (школа молодых ученых) : междунар. молодёжная науч. конф. (8–10 ноября 2017 г.) : материалы конф. – сб. докл.: в 4 т. – Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т. 2. – С. 537–542.
3. Просветов, Г. И. Дискретная математика: задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г. И. Просветов. – 2-е изд., доп. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 240 с.
4. Якупов, З. Я. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах : учеб. пособие / З. Я. Якупов, Р. К. Галимова. – Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – 140 с.

5. Якупов, З.Я. Решение одного нелинейного диофантова уравнения / З. Я. Якупов, А.З. Якупов // Интеграция образования. – 2001. – № 4–2. – С. 66–68.
6. Якупов, З. Я. Сравнение значений числовых выражений / З. Я. Якупов, А. З. Якупов // Интеграция образования. – 2001. – № 4. – С. 74–79.
7. Галимова, Р. К. Обработка результатов технологических экспериментов методом сеток с использованием различных модификаций парогазового разряда [Электронный ресурс] / Р. К. Галимова, З. Я. Якупов // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : материалы XIII междунар. конф. (12–16 июля 2017, Саранск). – Саранск, 2017. – С. 191–197.
8. URL: <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper27.pdf> (дата обращения: 24.12.2017).

О НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ АСПЕКТАХ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРОМ КОШИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ВОПРОСУ ИХ ОБОСНОВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЙ

Д. Г. Саникидзе, К. Р. Купатадзе, М. Г. Мирианашвили

Грузинский технический университет,
Институт вычислительной математики им. Н. Мухелишвили,
г. Тбилиси, Грузия
E-mail: j_sanikidze@yahoo.com,
k.kote.1976@gmail.com, mmirianashvili@yahoo.com

Метод интегральных уравнений в численном анализе, как известно, является одним из эффективных методов приближенного решения граничных задач теории функций и их приложений к различным прикладным задачам, в частности, к задачам физики и механики, особенно к численному решению двумерных задач плоской теории упругости. Ряд представляющих определенный интерес граничных задач может быть сведен к тому или иному сингулярному интегральному уравнению, из которых наиболее интересными в смысле общности по-видимому можно считать интегральные уравнения с сингулярными интегралами, содержащими определенные весовые функции. Ниже приводится одна из возможных квадратурных формул упомянутого вида:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \sum_{k=1}^n \sigma_{kn}(t_0) \varphi(x_{kn}), \quad (1)$$

где $\{\sigma_{kn}\}$ – соответствующие числовые коэффициенты, $\rho(t)$ оговоренная выше заданная суммируемая на $[-1, 1]$ функция, а квадратурные узлы

$\{x_{kn}\} \in (-1, +1)$ для $k = \overline{1, n}$. Здесь нашей основной целью является изучение вопроса сходимости квадратурных процессов вида (1) для некоторых определенных классов функций $\varphi(t)$. Исходом изучения упомянутого вопроса в общем случае можно воспользоваться, в первую очередь известными теоремами (см. [1], [2]), приводящими нас к возможности утверждения необходимых и достаточных условий сходимости квадратурных процессов вида (1). В связи с этим вопросом следует отметить, что в основу таких условий положены определенные теоретические результаты, относящиеся к вопросу сходимости общих в том или ином смысле квадратурных процессов.

Полагая в (1) относительно весовой функции $\rho(t)$, что соответствующий сингулярный интеграл существует (в смысле главного значения по Коши) для любой непрерывно дифференцируемой на $[-1, 1]$ функции $\varphi(t)$, будем считать узлы $\{x_{kn}\}$ ($k = \overline{1, n}$) пронумерованными в порядке их роста. В этих предположениях и обозначениях справедливо следующее утверждение:

Для того, чтобы квадратурный процесс (1) был сходящимся относительно $t_0 \in (-1, 1)$ для всякой непрерывно дифференцируемой на $[-1, +1]$ функции $\varphi(t)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. Процесс сходится, когда $\varphi(t)$ произвольный многочлен;
2. Существует число M , не зависящее от n и t_0 такое, что

$$\sum_{v=1}^{n-1} \left(x_{v+1}^{(n)} - x_v^{(n)} \right) \left| \sum_{k=1}^v \sigma_{kn}(t_0) \right| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Данное утверждение (2), очевидно, может быть сформулировано и в локальном виде, требуя выполнения условий 1, 2 в соответствующих фиксированных значениях параметра сингулярности $t_0 \in (-1, 1)$.

Наряду со сказанными выше безусловный интерес представляет, также, рассмотрение аналогичных вопросов для классов функций, характеризующихся со структурными свойствами на всем заданном отрезке еще и определенными локальными свойствами в ряде отдельных точек данного отрезка. В некоторых случаях $\rho(t)$ может быть выяснена взаимосвязь между такими свойствами рассматриваемых функций и

сходимостью в любой точке существования интеграла $\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt$,

$t_0 \in (-1, 1)$, притом и для $t_0 = \pm 1$. В данном случае к таким весовым функциям относится, например, часто встречающаяся в приложениях весовая функция Чебышева $\rho(t) = 1 / \sqrt{1 - t^2}$.

В связи со сказанным выше было бы уместно отметить, в частности, некоторые результаты о поведении сингулярных интегралов с указанной выше весовой функцией $\rho(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ вблизи концов данного

отрезка интегрирования $[-1, +1]$. Основным в этом направлении является то обстоятельство, что кроме условия существования соответствующего сингулярного интеграла в любой точке $t_0 \in (-1, 1)$ можно гарантировать также существование его концевых пределов при $t_0 \rightarrow c$ ($c = -1, +1$), которые и принимаются за значения рассматриваемого сингулярного интеграла в точках $t_0 = \pm 1$.

Рассмотрение аналогичных вопросов в случаях сингулярных интегралов с более общими весовыми функциями связано с изучением, соответственно, характера сходимости рассматриваемых квадратурных формул для применяемых сингулярных интегралов. Отметим при этом, что главенствующим фактором при этом является возможность равномерной сходимости упомянутых квадратурных формул для сингулярных интегралов вместе с оценкой их остаточных членов. Этот вопрос из-за определенной его сложности требует дальнейшего, более тщательного рассмотрения.

Библиографический список

1. Крылов, В. И. Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемых функций / В. И. Крылов. – ДАН СССР, 1955. – № 2. – С. 214–217.
2. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов – М., 1967.

ТЕОРЕМА УИТТЕКЕРА – ШЕННОНА – КОТЕЛЬНИКОВА (ОБЗОР)

А. А. Козина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: akozinowa@yandex.ru

Информационный этап технической революции берет начало от двух изобретений – телефона и радио. Эти средства связи обеспечивают непосредственный обмен информацией в диалоговом режиме. Радио снимает ограничения на местоположение абонентов. В результате обмен информацией возможен в любом момент времени. Развитие техники по-

степенно обеспечивало новыми услугами расширяющуюся общность потребителей.

В связи с этим возник вопрос о принципиальной возможности воспроизведения техническими средствами реальных сигналов, переносящих информацию, в первую очередь, речевых.

В 1932–1933 гг. 25-летний инженер В. А. Котельников задался мыслью о том, можно ли без искажений передавать сигнал в полосе частот меньшей, чем это позволяет передача «на одной боковой полосе». В современном представлении это означает возможность прохождения сигналов без искажения через канал, спектральная пропускная способность которого меньше спектральной ширины сигнала. Нам это представляется абсурдным, но в то время (1933 г.), когда проблемы спектральной фильтрации были не до конца понятны инженерам, подобная постановка вопроса представлялась разумной.

На самом деле работа содержала семь теорем, но все они являлись в той или иной степени развитием основной теоремы, которая гласит, что любая функция $f(t)$ с ограниченным спектром ширины F представима в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2F}\right) \text{sinc}(2\pi Ft - k\pi), \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (1)$$

Формула (1) показывает, что для восстановления на приемном конце канала связи сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, нет необходимости передавать все значения функции $f(t)$, определенной на всей оси $-\infty < t < \infty$, а достаточно передавать лишь значения этой функции $f(k\Delta)$, называемые отсчетами, через равные интервалы $\Delta = \frac{1}{2F}$.

Если функция $f(t)$ принадлежит пространству W_α , причем $(-\alpha, \alpha)$ – интервал, вне которого спектр $f(\omega)$ тождественно равен нулю, то величина $\Delta = \frac{1}{2F}$ указывает наибольший возможный интервал между отсчетами, при котором представление (1) еще имеет место. В случае, когда $f(t)$ не интегрируема в квадрате на всей оси, интервалы между отсчетами должны быть меньше величины $\frac{1}{2F}$. Класс W_r состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

По поводу теоремы Котельникова следует сделать ряд замечаний. Разложение (1) для целых функций конечной степени как разложение по формуле Лагранжа было известно математикам до работы Котельникова. Однако В. А. Котельников впервые обратил внимание на фундаментальное значение этого разложения для теории передачи сообщений, связав формулу (1) с проблемой передачи непрерывных сообщений, обладающих ограниченной полосой частот.

При доказательстве формулы (1) В. А. Котельников не опирался на теорию интерполяции целых функций, а воспользовался некоторым искусственным приемом, который быстро приводит к цели. Однако этот путь не позволяет выяснить причины, порождающие замечательное свойство функций с финитным спектром – свойство однозначной восстановимости значений функций на всей временной оси по ее значениям в дискретной (периодической) последовательности точек. Поэтому на таком пути нет возможности получить более общие результаты, о которых речь пойдет ниже.

Прием, примененный В. А. Котельниковым и обычно излагаемый в технической литературе, выглядит следующим образом.

Пусть $f(t)$ – функция с финитным спектром

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Функция $\tilde{f}(\omega)$ равна нулю вне интервала $(-\alpha, \alpha)$; внутри этого интервала она может быть разложена в ряд Фурье

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i \frac{\pi k \omega}{\alpha}} \quad (3)$$

причем коэффициенты ряда Фурье определяются соотношением

$$D_k = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i \frac{\pi k \omega}{\alpha}} \tilde{f}(\omega) d\omega. \quad (4)$$

Из сравнения (2) и (4) получаем

$$D_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} f\left(-\frac{\pi k}{\alpha}\right). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), для $\tilde{f}(\omega)$ получаем выражение

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\pi k}{\alpha}\right) e^{i \frac{\pi k \omega}{\alpha}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) e^{-i \frac{\pi k \omega}{\alpha}}. \quad (6)$$

Подставляя, наконец, (6) в (2) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим окончательно

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) e^{i\omega t - i\frac{\pi k \omega}{\alpha}} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i\omega \left(t - \frac{\pi k}{\alpha}\right)} d\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{\pi k}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{\pi k}{\alpha}\right)}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

В формуле (7) величина α имеет размерность рад/сек. Если перейти к частотам, измеряемым в герцах; положив

$$\alpha = 2\pi F,$$

так что интервал между отсчетами, т.е. точками, где берутся значения функции $f(t)$, будет равен

$$\Delta = \frac{1}{2F},$$

то формула (7) примет вид (1), чем и завершается доказательство.

Как же технически реализовать эту идею? Каждое слагаемое ряда (1) можно рассматривать как отклик идеального фильтра нижних частот с верхней граничной частотой, равной α , когда на вход фильтра действует δ -импульс (т.е. импульс, форма которого описывается δ -функцией Дирака), возникающий в момент $t_k = k\Delta$. Множитель $f(k\Delta)$ при этом может быть интерпретирован как величина, пропорциональная площади этого δ -импульса.

Поэтому способ передачи, использующий формулу (1), можно представить следующим образом. Через равные интервалы времени в моменты $t_k = k\Delta$ берутся отсчеты – мгновенные значения передаваемой функции $f(k\Delta)$. Далее по каналу связи передаются периодически следующие весьма короткие импульсы одинаковой длительности, амплитуды которых пропорциональны величинам функции $f(k\Delta)$. На приемном конце эти импульсы подаются на вход идеального фильтра нижних частот с верхней граничной частотой $\alpha = 2\pi F$, так что на выходе фильтра (как отклик на каждый из этих импульсов) получается функция, пропорциональная композиционной функции, $\frac{\sin 2\pi F(\tau - k\Delta)}{2\pi F(\tau - k\Delta)}$ разложения (1).

Поскольку на выходе фильтра отклик появляется не мгновенно, а запаздывает, причем время запаздывания $\Delta t_{\text{зап}} = \tau - t$ определяемое

свойствами фильтра. В частности, для идеального фильтра с прямоугольной частотной характеристикой время запаздывания бесконечно велико, так что начало отсчета времени τ отличается от начала отсчета времени t на бесконечно большую величину.

Так как рассматриваемый идеальный фильтр — это линейная система, то на выходе фильтра отклики на последовательные импульсы будут складываться, так что в результате на выходе получится функция

$$f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\sin 2\pi F(\tau - k\Delta)}{2\pi F(\tau - k\Delta)}$$

При этом предполагается, что начало передачи было при $t = -\infty$, а принимаемая функция становится полностью известной лишь при $t = +\infty$, ибо для ее восстановления нужно передать все отсчеты $f(k\Delta)$ при $-\infty < k < +\infty$. Однако в реальных условиях невозможно передать неограниченное количество отсчетов и притом абсолютно точно, так что аппаратная реализация метода передачи непрерывных сигналов, подсказываемого теоремой Котельникова, с абсолютно точным воспроизведением передаваемых функций практически неосуществима.

Поэтому следует рассмотреть причины, порождающие ошибки воспроизведения при реализации этого метода.

В реальном случае, во-первых, фильтр не будет идеальным.

Во-вторых, вследствие ошибок при съеме величин отсчетов $f(k\Delta)$ и наличии помех в канале связи, поступающие в приемное устройство значения $f(k\Delta)$ будут отличаться от истинных.

В-третьих, при технической реализации моменты $t_k = k\Delta$; в которые следует брать отсчеты, также будут определяться с некоторой погрешностью.

Все эти погрешности обычны, их уменьшение зависит от наших технических возможностей.

Другая группа причин, порождающих погрешности воспроизведения, связана с принципиальной невозможностью вести передачу в течение бесконечно большого интервала времени; в реальном случае передача начинается не при $t = -\infty$ и происходит в течение конечного интервала времени.

Конечно, существует еще ряд факторов, приводящих к ошибкам при воспроизведении сигналов, например, отличие формы реальных импульсов от δ -функций, неточности при реализации фильтра и т. д.

Теорема отсчетов во временной области. Непрерывный сигнал $x(t)$, имеющий спектр, ограниченный максимальной частотой F_m , может быть однозначно и без потерь восстановлен по своим дискретным отсчетам с частотой $F_{\text{дискр}} \geq F_m$. Алгоритм интерполяции этой функции по дискретным отсчетам с интервалом Δt_m :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t_m) \frac{\sin[\omega_m(t - k\Delta t_m)]}{\omega_m(t - k\Delta t_m)} \quad (8)$$

где $\omega_m = 2\pi F_m$ – частота Котельникова. Интервал дискретизации $\Delta t_m = 1 / (2F_m)$ часто называют интервалом Котельникова.

Теорема отсчетов в частотной области. Для сигнала $x(t)$, ограниченного на интервале $|t| < T$, для непрерывного спектра $s_x(f)$:

$$s_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_x(2\pi k\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - k\Delta f)}{2\pi T(f - k\Delta f)}, \quad (9)$$

где Δf – шаг отсчёта частоты.

Независимо теорема отсчётов была установлена в 1949 г. выдающимся американским ученым К. Шенноном-создателем важного раздела теории связи-теории информации. Эта теорема имеет исключительное значение для техники связи. Следует отметить, что эта теорема была открыта ещё в начале XX в. английскими математиками Е. Т. Уитекером и Дж. М. Уитекером. Однако это крупнейшее научное достижение по праву связывают с именами Котельникова и Шеннона, так как именно благодаря открытию ими теоремы отсчётов инженеры получили возможность создания цифровых систем, которые в конце XX в. произвели революцию в электросвязи и цифровой обработке сигналов.

Обобщения теоремы В.А. Котельникова. При доказательстве теоремы Котельникова были приняты некоторые ограничения:

- 1) фиксированный нулевой начальный отсчёт;
- 2) неограниченность спектра реальных стохастических сигналов;
- 3) сложность расчётов при восстановлении функции членами рядов (8) и (9);
- 4) неравномерность отсчётов;
- 5) сгруппированность отсчётов;
- 6) отсутствие определения статистических характеристик погрешностей при дискретизации;
- 7) отсутствие учёта погрешностей измерения функции в точках отсчёта t_i ;
- 8) отсутствие учёта погрешностей, вызванных ограниченной порядностью, при цифровой реализации рядов (8) и (9) и др.

Результаты В.А. Котельникова породили целый ряд исследований, направленных на устранение этих ограничений.

Тем не менее, многие из этих проблем остаются открытыми.

Библиографический список

1. Худяков, Г. И. Теорема отсчетов для цифровой обработки случайных сигналов / Г. И. Худяков // Компоненты и технологии. – 2009. – № 5. – С.110.

2. Котельников, В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи / В. А. Котельников // Успехи физических наук. – 2006. – № 7. – С. 762.

3. Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – 1971. – С.149.

4. Басараб, М. А. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона / М. А. Басараб, Е. Г. Зелкин, В. Ф. Кравченко, В. П. Яковлев. – 2004.

5. Кузнецов, Н. А. Развитие теоремы отсчётов Котельникова / Н. А. Кузнецов, И. Н. Сеницин // Успехи физических наук. – 2009. – № 2. – С. 216.

К ВОПРОСУ АППРОКСИМАЦИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ

А. Н. Тында, В. В. Бобров

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru

Введение

Целью данной работы является аппроксимация интегралов, имеющих интегрируемые особенности подинтегральной функции. Необходимость в приближенном вычислении таких интегралов возникает, в частности, при аппроксимации решений слабосингулярных интегральных уравнений, а также при решении некоторых задач электродинамики наноструктур (например, для определения дипольных моментов по известному распределению электрических полей в тонких сегнетоэлектрических пленках). При этом в большинстве случаев невозможно аналитическое представление таких интегралов, они не выражаются через элементарные функции.

1. Одномерный случай

Рассмотрим сначала одномерный случай.

$$\int_a^b \frac{h(t,s)}{|t-s|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in [a,b]. \quad (1)$$

Для аппроксимации интеграла (1) покроем отрезок интегрирования сеткой, сгущающейся к особой точке t по следующему правилу

$$t_i = t - (t - a) \left(\frac{n_1 - i}{n_1} \right)^v, i = 0, \dots, n_1, \quad (2)$$

$$t_{i+n_1} = t + (b - t) \left(\frac{i}{n_2} \right)^v, i = 0, \dots, n_2, \quad (3)$$

где n_1 и n_2 – это число узлов сетки слева и справа от особой точки, определяемое по формулам

$$l = \frac{t - a}{b - t}, n_1 = \left[\frac{ln}{l + 1} \right], n_2 = n - n_1. \quad (4)$$

Параметр v , отвечающий за степень неравномерности сетки, зависит от показателя гладкости r функции $h(t, s)$ по переменной s и порядка особенности α . Он определяется следующим образом

$$v = \frac{r + 1}{\alpha + 1}.$$

Схема расположения узлов представлена на рис. 1.

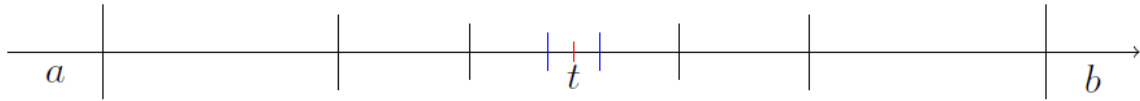


Рис. 1. Одномерная сетка

Интеграл (1) теперь может быть представлен в виде

$$\int_a^b \frac{h(t, s)}{|t - s|^\alpha} = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{h(t, s)}{|t - s|^\alpha}. \quad (5)$$

К каждому из интегралов в правой части (5) применяется квадратурная формула Гаусса по r узлам.

2. Двумерный случай

Рассмотрим теперь интеграл в прямоугольной области на плоскости

$$\iint_{ac}^{bd} H(t_1, t_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (6)$$

$$(t_1, t_2) \in D = \{(t_1, t_2) : a \leq t_1 \leq b, c \leq t_2 \leq d\}.$$

Здесь $H(t_1, t_2, s_1, s_2)$ – функция с особенностью, имеющая вид

$$H(t_1, t_2, s_1, s_2) = \frac{h(t_1, t_2, s_1, s_2)}{((t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (7)$$

Разобьем область интегрирования на части линиями, параллельными осям координат, так, как это показано на рис. 2 для случая $a = c = 0$.

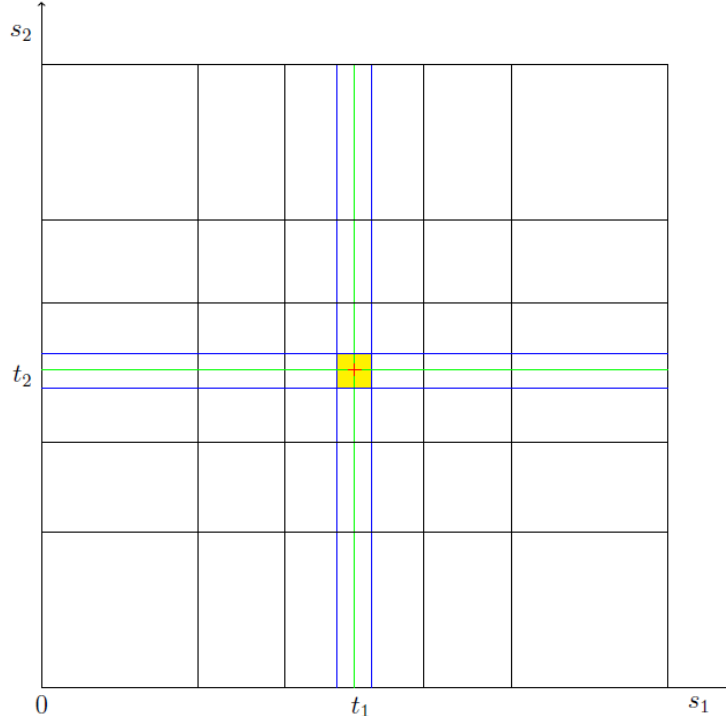


Рис. 2. Двумерная сетка

Абсциссы и ординаты точек пересечения этих линий с осями координат определяются в соответствии с принципом (2)–(3) по каждой из переменных. Интеграл (6) теперь может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d \frac{h(t_1, t_2, s_1, s_2)}{((t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2)^\alpha} ds_1 ds_2 = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_{1,(i-1)}}^{t_{1,i}} \int_{t_{2,(j-1)}}^{t_{2,j}} \frac{h(t_1, t_2, s_1, s_2)}{((t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2)^\alpha} ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Сегмент $[t_{1,(i-1)} \leq s_1 \leq t_{1,i}, t_{2,(j-1)} \leq s_2 \leq t_{2,j}]$ выделен на рис. 3.

Для аппроксимации каждого из интегралов в правой части (8) также применяется составная квадратурная формула Гаусса по r узлам.

$$\int_{t_{1,(i-1)}}^{t_{1,i}} \int_{t_{2,(j-1)}}^{t_{2,j}} H(t_1, t_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \approx$$

$$\approx \frac{t_{1,(i)} - t_{1,(i-1)}}{2} \frac{t_{2,(j)} - t_{2,(j-1)}}{2} \sum_{k,m=1}^r A_k A_m H(t_1, t_2, x_k, y_m), \quad (9)$$

где x_k и $y_m, (k, m = 1, \dots, r)$ – нули многочленов Лежандра степени r , отображенные на соответствующие интервалы, A_k – весовые коэффициенты.

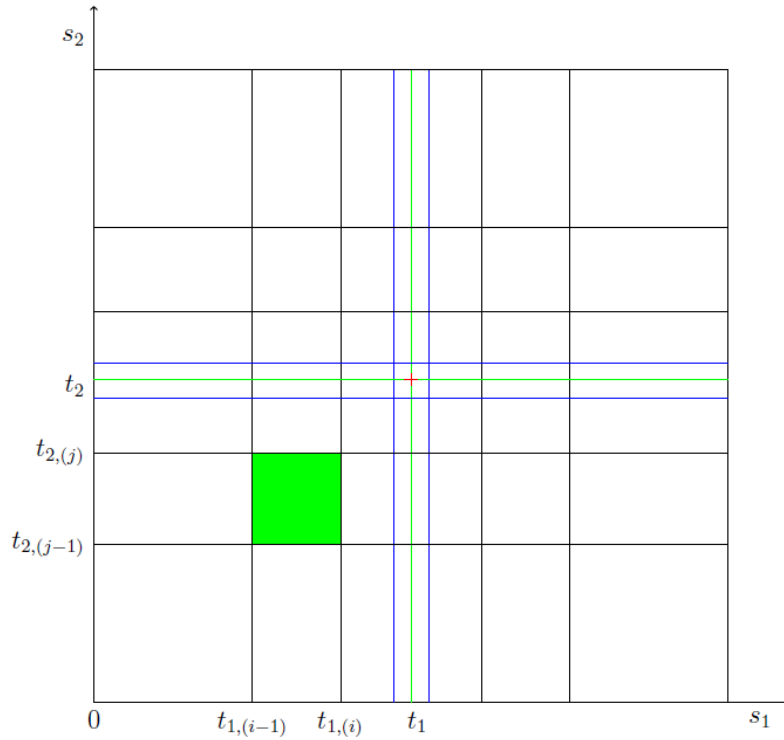


Рис. 3. Иллюстрация области в формуле (9)

3. Численный пример

Приведем результаты вычисления интеграла вида (6) для случая $\alpha = 0.5$ и области интегрирования $[0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1]$. В качестве особых точек были выбраны точки с координатами $(0.5, 0.51)$, $(0.0, 0.51)$, $(0.1, 0.51)$, $(0.5, 0.0)$ и $(0.5, 0.1)$. Погрешность аппроксимации для каждой из указанных особых точек приведена в табл. 1.

Таблица 1

Точность вычисления интеграла

n	$(0.5, 0.51)$	$(0.0, 0.51)$	$(1.0, 0.51)$	$(0.5, 0.0)$	$(0.5, 1.0)$
10	0.00423424	0.00152788	0.00313792	0.00153835	0.0030642
20	0.000836392	0.000354857	0.000713247	0.000358978	0.000696475
50	0.000117618	5.45546e-005	0.000107958	5.53651e-005	0.000105471
100	2.82158e-005	1.36943e-005	2.59014e-005	1.36898e-005	2.59135e-005
200	6.91222e-006	3.40513e-006	6.42243e-006	3.40455e-006	6.4239e-006
500	1.09276e-006	5.43117e-007	1.02265e-006	5.4308e-007	1.02274e-006

Библиографический список

1. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1974. – С. 63–72.
2. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 68–78.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Е. Агафонов, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: alex.agafonov1@yandex.ru, math.kudryashova@yandex.ru

В данной работе исследуются и реализуются разностные схемы для решения стационарных и нестационарных нелинейных уравнений теплопроводности.

1. Нелинейная стационарная задача

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности в прямоугольной области Ω . Температура определяется как решение следующей задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа

$$-\sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} (k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_l}) = f(x, u) \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Поставим в соответствие задаче (1)–(2) нелинейную разностную схему

$$\Lambda y = \varphi, \quad x \in \omega, \quad (3)$$

$$y(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega, \quad (4)$$

где

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y, \quad \Lambda_l y = -(\alpha_l(x, y) y_{\bar{x}_l})_{x_l}, \quad l=1, 2. \quad (5)$$

Построим в области $D = \{(x, t) | 0 < x < a, 0 < t \leq T\}$ равномерную сетку с шагом h по x и шагом τ по t . $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$; $h = \frac{a}{n}$; $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, m$; $\tau = \frac{T}{m}$. Обозначим узлы сетки через (x_i, t_j) , а приближённые значения функции $u(x, t)$ в этих узлах через u_i^j .

Коэффициенты в выражении (5) определяются по формулам:

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{2}(k(x_1 - h_1, x_2, y(x_1 - h_1, x_2)) + k(x, y)), \quad (6)$$

$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{2}(k(x_1, x_2 - h_1, y(x_1, x_2 - h_2)) + k(x, y)). \quad (7)$$

Для решения нелинейного уравнения большое распространение получили методы, родственные классическому методу Ньютона (методы квазилинеаризации).

Линеаризация правой части приводит к итерационному процессу, основанному на решении разностного уравнения

$$\Lambda(y_k)y_{k+1} - \frac{\partial f}{\partial u}(x, y_k)y_{k+1} = f(x, y_k) - \frac{\partial f}{\partial u}(x, y_k)y_k, x \in \omega \quad (8)$$

с граничными условиями

$$y_{k+1}(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega. \quad (9)$$

2. Нелинейная нестационарная задача

Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности в изотропной среде:

$$\begin{aligned} c(x, u) \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f(x, t, u), \\ Lu &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ 0 \leq t \leq T, 0 < x < b, \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (11)$$

и краевыми условиями первого рода:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t), \quad (12)$$

где $f(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ - заданные функции.

2.1 Линеаризованная разностная схема

Рассмотрим разностную схему

$$C(x, y_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(y_n)y_{n+1} = f(x, t_n, y_n), \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

$$y_{n+1} = g(x, t_{n+1}), \quad x \in \partial\omega, \quad y_0 = u_0(x), \quad x \in \omega.$$

Чтобы аппроксимировать уравнение (10) в точке (x_i, t_j) , производную $\partial u / \partial t$ заменим в точке (x_i, t_j) разностным отношением

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau), \quad (14)$$

а производную Lu – второй разностной производной

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_{i+1}^j y_i^j - \alpha_{i+1}^j y_{i-1}^{j+1} - \alpha_i^j y_i^{j+1} + \alpha_i^j y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (15)$$

Получим разностную схему, которая имеет вид:

$$-\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \frac{\alpha_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} - (\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j) u_i^{j+1} + \alpha_{i+1}^j u_{i+1}^{j+1}}{h^2} = -\varphi_i^j(u_m^n) \quad (16)$$

$$u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad u_n^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, m-1.$$

Для вычисления коэффициентов α_l можно использовать простейшие формулы

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{2}(k(x_1 - h_1, x_2, y(x - h_1, x_2)) + k(x, y)),$$

$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{2}(k(x_1, x_2 - h_2, y(x_1, x_2 - h_2)) + k(x, y)).$$

Систему (16) будем решать методом прогонки.

Разностная схема (16) аппроксимирует исходную краевую задачу (10) с погрешностью порядка $O(\tau + h^2)$.

2.2 Квазилинеаризованная разностная схема.

Рассмотрим разностную схему с квазилинеаризованной правой частью:

$$C(x, y_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(y_n) y_{n+1} = f(x, t_{n+1}, y_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, t_{n+1}, y_n), \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

В развернутом виде эта схема имеет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \frac{1}{h^2}(\alpha_i^j u_{i-1}^{j+1} - (\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j) u_i^{j+1} + \alpha_{i+1}^j u_{i+1}^{j+1}) = \\ = \varphi'(x_i, t_{i+1}, y_i^j) \cdot y_i^{j+1} - \varphi'(x_i, t_{i+1}, y_i^j) \cdot y_i^j, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad u_n^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, m-1, \end{aligned} \quad (18)$$

Систему (18) можно решать методом разностной прогонки.

Применим метод линеаризации к решению следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = e^x \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot u \cdot e^x (1+x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq T \leq \frac{\pi}{4}$$

с начальными условиями $u(x, 0) = 0$ и граничными условиями $u(0, t) = \sin(t)$, $u(x, t) = e \cdot \sin(t)$, точным решением которой является функция $u(x, t) = e^x \sin(t)$. Результаты решения этой задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1

Точка x	Приближенное решение	Точное решение	Погрешность
0,010000	0,158146413	0,158006658	1.3975587066497E-4
0,060000	0,166370203	0,166107832	2.6237137564844E-4
0,220000	0,195653564	0,194929347	7.2421758342650E-4
0,280000	0,207958796	0,206983104	9.7569173927022E-4
0,380000	0,230277023	0,228751707	0.0015253155824024
0,440000	0,244845952	0,242896923	0.0019490288661033
0,890000	0,384655617	0,380938204	0.0037174129847633
0,920000	0,395571237	0,392539500	0.0030317372448783
0,980000	0,417750845	0,416812787	9.3805818648322E-4
0,990000	0,421486856	0,421001825	4.8503659368937E-4

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989.
2. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Либроком, 2009.
3. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003.
4. Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М. : Мир, 1986.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Т. В. Грунина, А. С. Канаева

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: eliseevat@mail.ru, nasy3918@gmail.com

Важное значение имеют коэффициентные обратные задачи для эллиптических уравнений, в которых младшие коэффициенты зависят от

одной пространственной переменной. Они представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Такие задачи встречаются при моделировании электроразведки постоянным током, в теории фильтрации, определении теплофизических характеристик и т.д. Разработка методов решения обратных задач обусловлена как теоретическим исследованием, так и практической потребностью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения младшего коэффициента в эллиптическом уравнении второго порядка в прямоугольной области $\Omega_1 = \left\{ x \mid x = (x_1, x_2), x_1 \in \left(0; \frac{l_1}{2}\right) \cup \left(\frac{l_1}{2}; l_1\right), x_2 \in (0; l_2) \right\}$ с линией сопряжения $x_1 = l_1 / 2$. Постановка прямой задачи: требуется найти решение уравнения

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}(x_1, x_2) + c(x_2) \tilde{u} &= 0, \quad x \in \Omega_1 \\ \Delta \tilde{u}(x_1, x_2) &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\tilde{u}(x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \partial\Omega_1. \quad (2)$$

Обратная задача состоит в определении коэффициента $c(x_2)$. В качестве дополнительных данных выбираются измерения на границе области:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(x) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \partial\Omega_1, \quad (3)$$

где n – внешняя по отношению к области Ω_1 нормаль.

На линии сопряжения слоев $x_1 = l_1 / 2$ осуществляется условие идеального контакта.

$$\tilde{u}_-\left(\frac{l_1}{2}, x_2\right) = \tilde{u}_+\left(\frac{l_1}{2}, x_2\right), \quad k \frac{\partial \tilde{u}_-}{\partial x}\left(\frac{l_1}{2}, x_2\right) = \frac{\partial \tilde{u}_+}{\partial x}\left(\frac{l_1}{2}, x_2\right), \quad k > 0,$$

Определим оператор преобразования $\Pi: \tilde{v}(x_1) \rightarrow v(x_1)$, где функция $\tilde{v}(x_1)$ определена в области на интервале $(0; l_1 / 2) \cup (l_1 / 2; l_1)$, а функция $v(x_1)$ – на интервале $(0; l_1)$, имеет следующий вид

$$v(x_1) = \begin{cases} \frac{2k}{k+1} \tilde{v}(x_1) - \frac{k-1}{k+1} \tilde{v}(l_1 - x_1), & 0 < x_1 < \frac{l_1}{2}, \\ \tilde{v}(x_1), & \frac{l_1}{2} < x_1 < l_1. \end{cases}$$

Оператор преобразования $\Pi^{-1}: v(x_1) \rightarrow \tilde{v}(x_1)$ определен по правилу

$$\tilde{v}(x_1) = \begin{cases} \frac{k+1}{2k}v(x_1) + \frac{k-1}{2k}v(l_1 - x_1), & 0 < x_1 < \frac{l_1}{2}, \\ v(x_1), & \frac{l_1}{2} < x_1 < l_1. \end{cases}$$

К задаче (1) – (3) применим оператор преобразования Π и получим соответствующую задачу для однородной области $\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$: требуется найти коэффициент $c(x_2)$ и решение $u(x_1, x_2)$ уравнения

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_1, x_2) + c(x_2)u &= 0, \quad x \in \Omega \\ \Delta u(x_1, x_2) &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

и измерениям на границе области:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (6)$$

где n – внешняя по отношению к области Ω нормаль.

2. Сеточная обратная задача

Построим разностный аналог коэффициентной обратной задачи (4)–(6): введем равномерную сетку с шагом h_α , множество внутренних узлов сетки обозначим:

$$\omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\beta = i_\beta h_\beta, i_\beta = 1, 2, \dots, N_\beta - 1, N_\beta h_\beta = l_\beta, \beta = 1, 2\};$$

множество приграничных узлов:

$$\partial\omega^* = \{x \mid x \in \omega, x_\beta = h_\beta, x_\beta = l_\beta - h_\beta, \beta = 1, 2\}.$$

Прямой задаче (4), (5) ставится в соответствие разностная задача Дирихле:

$$-\Lambda y + c(x_2)y = 0, \quad x \in \omega, \quad (7)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\omega, \quad (8)$$

где разностный оператор Лапласа Λ на пятиточечном шаблоне имеет вид:

$$\Delta y = \frac{y(x_1 - h_1, x_2) - 2y(x_1, x_2) + y(x_1 + h_1, x_2)}{h_1^2} + \\ + \frac{y(x_1, x_2 - h_2) - 2y(x_1, x_2) + y(x_1, x_2 + h_2)}{h_2^2}$$

В обратной задаче младший коэффициент $c(x_2)$ неизвестен, но указаны дополнительные условия, заменяющие (6). Если переходить к дискретной задаче, дополнительные условия могут быть связаны с заданием решения сетки в узлах $\partial\omega^*$.

Измерения для входных данных производятся с погрешностью (погрешности аппроксимации можно не учитывать). При решении обратной задачи (4) – (6) мы ограничимся случаем, когда нормальная производная на границе задана с погрешностью.

$$y(x) \approx \phi_\delta(x), \quad x \in \partial\omega^*, \quad (9)$$

где δ – уровень погрешности.

3. Итерационное решение обратной задачи

Применим градиентный итерационный метод для приближенного решения обратной задачи (7)–(9). Младший коэффициент $c(x_2)$ уточняется на каждом итерационном шаге, сравнивая невязку на предыдущей и последующей итерации.

Невязка определяется в следующем виде:

$$J(c) = \sum_{x \in \partial\omega^*} (y(x) - \phi_\delta(x))^2 h(x),$$

где $h(x)$ определяется из системы:

$$h(x) = \begin{cases} h_1, & x_2 = h_2, l_2 - h_2, \quad x_1 \neq h_1, l_1 - h_1, \\ h_2, & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 \neq h_2, l_2 - h_2, \\ 0.5(h_1 + h_2), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 = h_2, l_2 - h_2. \end{cases}$$

Для градиента функционала имеем:

$$J'(c) = \sum_{x_1 \in \omega_1} y \xi h_1, \quad x_2 \in \omega_2,$$

где функция $\xi(x_1, x_2)$, $y(x_1, x_2)$ являются решениями задач для сопряженного и основного состояний соответственно.

Для сопряженного состояния будем считать, что $\xi(x_1, x_2) = 0$ на границе области, а во внутренних узлах:

$$-\Delta \xi + c(x_2) \xi = -F(x_1, x_2), \quad x \in \omega,$$

правая часть определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_2}(y(x) - \phi_\delta(x)), & x_2 = h_2, l_2 - h_2, x_1 \neq h_1, l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_2}(y(x) - \phi_\delta(x)), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, x_2 \neq h_2, l_2 - h_2, \\ \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}(y(x) - \phi_\delta(x)), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, x_2 = h_2, l_2 - h_2, \\ 0, & x \in \omega, x \notin \partial\omega^*. \end{cases}$$

Искомый коэффициент $c^k(x_2)$ уточняется по следующей итерационной схеме:

$$\frac{c^{k+1} - c^k}{s_{k+1}} + J'(c^k) = 0.$$

Для того чтобы получить приближенное решение исходной задачи (1)–(3), к результатам численного моделирования применяется оператор Π^{-1} .

4. Численные результаты

Входные данные при нахождении младшего коэффициента находились из решения прямой задачи (4), (5). Задача решалась на равномерной сетке.

Рассматривается ситуация, когда граничное условие (5) задается точно, а условие (6) задается с возмущением. Например к границе $x_2 = l_1$, $x_2 \in [0, l_2]$ в приграничных узлах имеем:

$$y(l_1 - h_1, x_2) = \phi_\delta(l_1 - h_1, x_2) = \phi(l_1 - h_1, x_2) + 2h_1\delta\left(\sigma(h_1, x_2) - \frac{1}{2}\right),$$

где

$$\phi(l_1 - h_1, x_2) = \phi(l_1, x_2) - h_1\psi(l_1, x_2),$$

а $\sigma(h_1, x_2)$ – случайная функция.

Таблица 1

$$c(x_2) = 5x_2, \quad \varphi(x) = 5 + x_1$$

N	Невязка
0	0,643015
5	0,156953
10	0,0608788
11	0,058943

Таблица 2

$$c(x_2) = \frac{1}{x_2^2 + 1}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

N	Невязка
0	0.0503088
300	0,0499597
500	0.0498182
1000	0,0496504
1354	0,0496256

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – М. : Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
2. Вабищевич, П. Н. О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений / П. Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2125–2129.
3. Кудряшова, Н. Ю. Вычислительная математика: метод. указания к выполнению лабораторных работ / Н. Ю. Кудряшова, Н. В. Мойко – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – 50 с.
4. Елисеева, Т. В. Операторы преобразований и их применение для решения задач о структуре волнового и температурного полей в кусочно-однородном полупространстве / Т. В. Елисеева // Известия высших учебных заведений. Математика. – М. : Высш. шк., 2002 – 840 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Т. В. Грунина, Е. С. Кунцова

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

E-mail: eliseevat@mail.ru, kuntsowa.elena@yandex.ru

Определение теплофизических свойств материала по информации о температуре внутри тела может быть основано на решении обратных задач теплопроводности. Поэтому большой практический интерес приобрели коэффициентные обратные задачи теплопроводности, заключающиеся в определении коэффициентов уравнения переноса теплоты. Обратные задачи нахождения коэффициентов для линейных уравнений являются нелинейными. Это создает ряд проблем построения вычисли-

тельных алгоритмов для приближенного решения коэффициентных задач.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обратную задачу идентификации коэффициента, зависящего от решения для параболического уравнения. Пусть в прямоугольнике $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}$, $0 \leq t \leq T$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

а коэффициент $k(u)$ удовлетворяет условию $k(u) \geq k > 0$.

Рассматривается краевая задача с граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

и однородными начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

В виде (1)–(3) формулируется прямая задача.

В коэффициентной обратной задаче необходимо найти зависимость $k(u)$, по наблюдениям в некоторых внутренних точках $z_m \in \Omega$, $m = 1, 2, \dots, M$. С учетом этого положим

$$u(z_m, t) \approx \varphi_m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Большое внимание при исследовании коэффициентных обратных задач (1)–(4) уделяется проблеме единственности решения. В предположениях о достаточной гладкости коэффициента $k(u)$ и самого решения достаточно потребовать монотонности функции $g(t)$. Положим

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) > u_{\min} = 0, \quad 0 < t < T, \quad g(0) = 0, \quad g(T) = u_{\max} \quad (5)$$

2. Сеточная задача

Построим сеточный аналог прямой задачи. Введем по времени равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\}$ с шагом $\tau > 0$. Приближенное решение обозначим $y_i^j = y(x_i, t_j)$. С равномерной сеткой по времени свяжем неравномерную сетку по u :

$$u_\beta = u_{\beta-1} + N_0^{(\beta)} \tau, \quad u_0 = u_{\min}, \quad u_p = u_{\max}, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

Получается, что между узлами $u_{\beta-1}$ и u_β делается $N_0^{(\beta)}$ шагов по времени.

Введем равномерную сетку с шагом h на интервале $\Omega = [0, l]$:
 $\omega = \{x \mid x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\}$.

Уравнению (1) во внутренних узлах сетки по пространству поставим чисто неявную разностную схему

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[k \left(\frac{y_{i+1}^{j+1} + y_i^{j+1}}{2} \right) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k \left(\frac{y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{2} \right) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Аппроксимация краевых условий (2) дает

$$y_0^j = 0, y_N^j = g(t_j), j = 0, 1, \dots, N_0,$$

Начальному условию (3) соответствует

$$y_i^0 = 0, i = 0, \dots, N.$$

3. Параметрическая оптимизация

Рассмотрим проекционный метод решения обратных задач, который связан с представлением приближенного решения в параметрическом виде и с нахождением параметром этого представления.

В пространстве функций K выбирается конечномерное K_p с базисом $\eta_\beta, \beta = 1, 2, \dots, p$. При приближенном решении коэффициентной обратной задачи (1)–(4) искомый коэффициент представляется в виде

$$k_p(u) = \sum_{\beta=1}^p \alpha_\beta \eta_\beta(u). \quad (7)$$

Коэффициенты $\alpha_\beta, \beta = 1, 2, \dots, p$ подлежат определению. Будем считать, что точность задания входной информации определяется величиной δ . Для задачи (1)–(4)

$$u(z_m, t) = \varphi_m^\delta(t), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

$$J(k) = \sum_{m=1}^M \int_0^T \left(\varphi_m^\delta(t) - \varphi_m(t) \right)^2 dt \leq MT\delta^2. \quad (9)$$

В качестве примера (7) рассмотрим кусочно-постоянную аппроксимацию, где пробные функции задаются в виде

$$\eta_\beta(u) = \begin{cases} 0, & u < u_{\beta-1}, \\ 1, & u_{\beta-1} \leq u \leq u_\beta, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \\ 0, & u > u_\beta, \end{cases} \quad (10)$$

При такой параметризации необходимо найти только один числовой параметр α_β на каждом подынтервале.

Используя кусочно-постоянную аппроксимацию (7), (10), (6) неизвестного коэффициента $k(u)$ можно использовать пошаговую идентификацию. Будем считать, что приближение для нелинейного коэффициента при $0 \leq u < u_{\beta-1}$ известно. Также известно разностное решение до соответствующего момента времени. Решение обратной задачи будем искать при $u_{\beta-1} \leq u < u_\beta$.

Через $L^{(\beta)}$ обозначим номер слоя по времени, который соответствует достижению решения u_β . В соответствии с (6), получим

$$L^{(\beta)} = \sum_{\gamma=1}^{\beta} N_0^{(\gamma)}, \quad L^{(0)} = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p.$$

При решении обратной задачи известно решение $y_l, 0 \leq l \leq L^{\beta-1}$, а также коэффициент k_u до этого же момента времени. Далее решается разностная задача

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{r} = \frac{1}{h} \left[k \left(\frac{y_{i+1}^{j+1} + y_i^{j+1}}{2} \right) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k \left(\frac{y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{2} \right) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right], \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = L^{(\beta-1)} + 1, L^{(\beta-1)} + 2, \dots, L^{(\beta)}$$

$$y_0^j = 0, \quad y_N^j = g(t_j), \quad j = L^{(\beta-1)} + 1, L^{(\beta-1)} + 2, \dots, L^{(\beta)}. \quad (12)$$

Неизвестным является только коэффициент α_β . Для его определения имеется дополнительная информация (8) и (9). Полагаем, что точки наблюдения $z_m, m = 1, 2, \dots, M$ являются внутренними узлами сетки по пространству. В качестве критерия близости приближенного решения в этих точках к измеренным при решении задачи (11), (12) в соответствии с (8) можно взять

$$J^{(\beta)} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=L^{(\beta-1)}+1}^{L^{(\beta)}} \left(y_j(z_m) - \varphi_m^\delta(t_j) \right)^2 \tau \quad (13)$$

Так как $J^{(\beta)} = J^{(\beta)}(\alpha_\beta)$, то параметр α_β определяется как минимум функции $J^{(\beta)}(\alpha_\beta)$.

Принимая во внимание (9) в соответствии с принципом невязки будем выбирать максимальное $N_0^{(\beta)}$, для которого $J^{(\beta)} \leq M N_0^{(\beta)} \delta^2$.

4. Численные результаты

Дополнительные наблюдаемые значения во внутренних точках сетки находились из решения прямой задачи, при $k(u) = 0.3 + 2u$. Для решения обратной задачи ограничимся только одной точкой наблюдения

$$z_1 = 0.6, M=1, \varphi_1(t_j) = y_j(z_1), j = 1, 2, \dots, N_0,$$

где $y_j(x)$ – сеточное решение прямой задачи. Эти данные возмущались нормально распределенной функцией:

$$\varphi_1^\delta(t_j) = \varphi_1(t_j) + 2\delta \left(\sigma(t_j) - \frac{1}{2} \right), j = 1, 2, \dots, N_0.$$

Например, рассмотрим подынтервал $(L^{(0)}; L^{(1)})$ между которыми делается два шага по τ . Исходя из разностной задачи (11), (12) запишем систему

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i+1}^1 - \left(\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) y_i^1 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i-1}^1 - \frac{y_i^0}{\tau} = 0 \\ \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i+1}^2 - \left(\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) y_i^2 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i-1}^2 - \frac{y_i^1}{\tau} = 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (14)$$

Система (14) состоит из $2(N-1)$ уравнений и $2N-1$ неизвестных. Для того чтобы дополнить систему воспользуемся условием (13), получаем:

$$J = \left(\frac{\frac{1}{\tau} y_m^0 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{m+1}^1 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{m-1}^1}{\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau}} - \varphi_m^\delta(t_1) \right)^2 \tau + \left(\frac{\frac{1}{\tau} y_m^1 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{m+1}^2 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{m-1}^2}{\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau}} - \varphi_m^\delta(t_2) \right)^2 \tau. \quad (15)$$

Для нахождения минимума функции (15) найдем производную по α_1 и полученное выражение приравняем к нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i+1}^1 - \left(\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) y_i^1 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i-1}^1 - \frac{y_i^0}{\tau} &= 0, i = 1, \dots, N-1 \\ \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i+1}^2 - \left(\frac{2\alpha_1}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) y_i^2 + \frac{\alpha_1}{h^2} y_{i-1}^2 - \frac{y_i^1}{\tau} &= 0, i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (h^2 y_m^0 + \alpha_1 \tau y_{m+1}^1 + \alpha_1 \tau y_{m-1}^1 - 2\alpha_1 \tau \varphi_m^\delta(t_1) - h^2 \varphi_m^\delta(t_1)) \times \\
& \times (y_{m+1}^1 - 2y_m^0 + y_{m-1}^1) + (h^2 y_m^1 + \alpha_1 \tau y_{m+1}^2 + \alpha_1 \tau y_{m-1}^2 - \\
& - 2\alpha_1 \tau \varphi_m^\delta(t_2) - h^2 \varphi_m^\delta(t_2))(y_{m+1}^2 - 2y_m^1 + y_{m-1}^2) = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) является нелинейной, ее решение можно найти, используя модифицированный метод Ньютона – Канторовича. Этот метод заключается в построении последовательных приближений, определяемых формулой:

$$Y_{n+1} = Y_n - [K'(Y_0)]^{-1} K Y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где Y_0 – начальное приближение, $Y_n^T = (y_1^1, \dots, y_{N-1}^1, y_1^2, \dots, y_{N-1}^2, \alpha_1)$

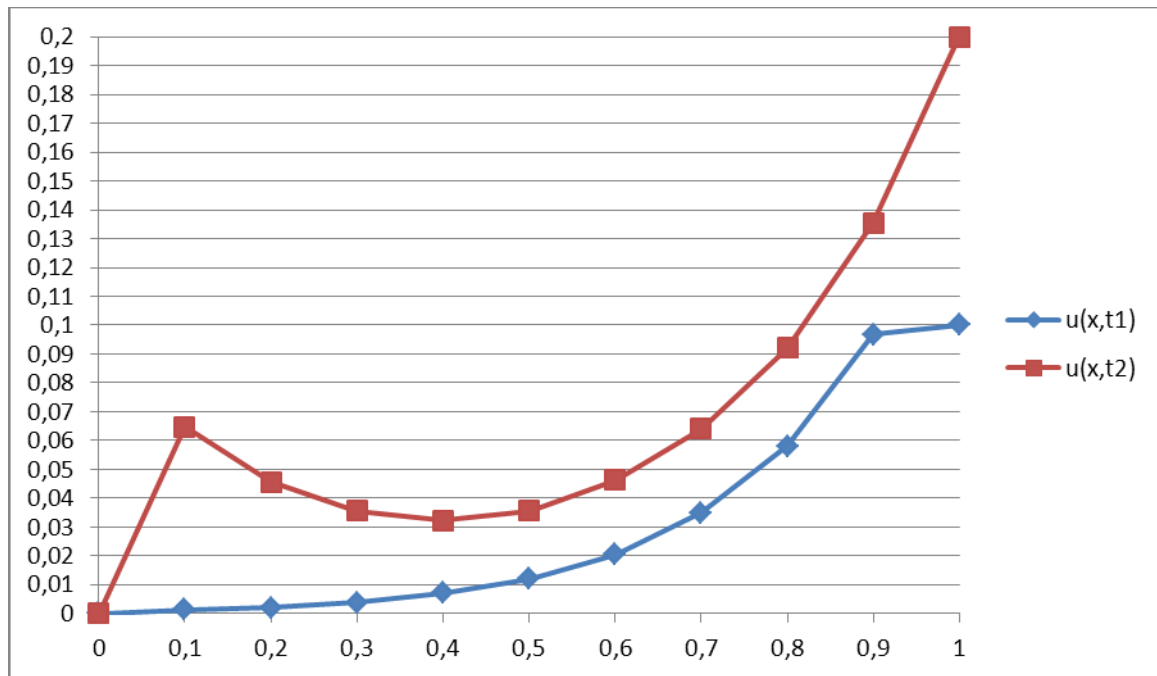


Рис. 1 $\alpha_1 = 0.27$, $\delta = 0.02$, $J^{(\beta)} \approx 0.00001947$

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – М. : Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
2. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1971. – 552 с.
3. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

О МАЛЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕКТОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Р. Ю. Леонтьев

Иркутский государственный университет,
г. Иркутск, Россия

E-mail: romanisu@yandex.ru

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Задан оператор $F: X \times \Lambda \rightarrow Y$, удовлетворяющий условию $F(0,0)=0$. Будем исследовать уравнение

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (1)$$

на предмет наличия решений $x = x(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$x(\lambda) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \quad (2)$$

Если оператор F имеет частную производную Фреше по первому аргументу $F_x(x, \lambda)$, причем $F_x(0,0)$ имеет ограниченный обратный, то выполняется стандартная теорема о неявном операторе, гарантирующая существование единственного решения $x = x(\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию (2).

Далее приводятся результаты, которые гарантируют существование (вообще говоря не единственного) решения, удовлетворяющего условию (2), когда теорема о неявном операторе не выполняется.

Пусть S – открытое множество в Λ , $0 \in \partial S$, где ∂S – граница множества S . Будем называть подобные множества *секториальной окрестностью нуля*. Справедлива

Теорема. Пусть выполнены следующие 4 условия:

1. Оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ на множестве

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda : x \leq r, \lambda \in S\}$$

и имеет на Ω частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ .

2. $F(0,0)=0$, а оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет при $\lambda \in S$ ограниченный обратный, для которого справедлива оценка

$$F_x^{-1}(0, \lambda) = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0,$$

где функционал $a(\lambda): S \rightarrow R_+$, причем $a(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

3. Имеет место предельное равенство (I – тождественный оператор)

$$\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0, V \rightarrow 0} F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(a(\lambda)V, \lambda) = I. \quad (3)$$

4. Имеет место оценка $F(0, \lambda) = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется секториальная окрестность нуля $S_0 \subset S$ такая, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) в достаточно малой окрестности нуля пространства X имеет решение $x = x(\lambda)$, удовлетворяющее условию (2).

Доказательство. Уравнение (1) заменим уравнением

$$x = \Phi(x, \lambda), \quad (4)$$

где $\Phi(x, \lambda) = x - F_x^{-1}(0, \lambda) F(x, \lambda)$. Далее сделаем в (4) замену $x = a(\lambda)V$ и после сокращения на $a(\lambda)$ получим $V = \Phi_0(V, \lambda)$, где

$$\Phi_0(V, \lambda) = V - \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Покажем, что существует множество $S_0 \in S$ и число $r_0 \in (0, r)$ такие, что при $\lambda \in S_0$ в шаре $V \leq r_0$ к оператору $\Phi_0(V, \lambda)$ можно применить принцип сжимающих отображений.

Применяя формулу Лагранжа для разности $F(a(\lambda)V_1, \lambda) - F(a(\lambda)V_2, \lambda)$ и стандартные оценки для интегралов, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \Phi_0(V_1, \lambda) - \Phi_0(V_2, \lambda) \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq \Theta \leq 1} I - F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \cdot V_1 - V_2 \end{aligned}$$

Далее, в силу непрерывности оператора $F_x(x, \lambda)$, ограниченности оператора $F_x^{-1}(0, \lambda)$ при $\lambda \in S$ и условия (3), получаем, что $\exists S'_0 \subset S$ и $\exists r_0 \in (0, r)$ такие, что $\forall \lambda \in S'_0$ и $\forall V_i$, удовлетворяющих неравенству $V_i \leq r_0$, $i = 1, 2$ выполняется

$$\sup_{0 \leq \Theta \leq 1} I - F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda) \leq q < 1,$$

причем эта оценка зависит только от выбора S'_0 и r_0 . Но тогда $\forall \lambda \in S'_0$ в шаре $V \leq r_0$ оператор $\Phi_0(V, \lambda)$ является сжатием.

Покажем теперь, что $\exists S_0 \subset S'_0 \subset S$ такое, что оператор $\Phi_0(V, \lambda)$ отображает шар $V \leq r_0$ в себя. Действительно при $\lambda \in S'_0 \subset S$ и $V \leq r_0$ имеем цепочку неравенств

$$\Phi_0(V, \lambda) \leq \Phi_0(V, \lambda) - \Phi_0(0, \lambda) + \Phi_0(0, \lambda) \leq qr_0 + \frac{c}{a^2(\lambda)} F(0, \lambda),$$

где c — положительная константа. Так как $F(0, \lambda) = o(a^2(\lambda))$, то $\exists S_0 \subset S'_0 \subset S$ такое, что выполнится

$$\frac{c}{a^2(\lambda)} F(0, \lambda) \leq (1 - q)r_0.$$

Но тогда получим $\Phi_0(V, \lambda) \leq r_0$ при $\lambda \in S_0 \subset S'_0 \subset S$ и $V \leq r_0$. Тогда согласно принципу сжимающих отображений и получим заключение теоремы. Теорема доказана.

Пример. Показать, что нелинейное интегральное уравнение

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(x) ds - \lambda^3 f(t) = 0,$$

где $f(t), x(t) \in C_{[0,1]}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеет решение в окрестности точки $x = 0$, $\lambda = 0$.

Введем оператор

$$F(x, \lambda) = \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(x) ds - \lambda^3 f(t).$$

Заметим сразу, что $F(0, 0) = 0$ и $F(0, \lambda) = -\lambda^3 f(t)$. Далее дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - 2 \int_0^1 x(s)h(s) ds$$

и

$$F_x(0, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t).$$

Тогда обратный к нему оператор имеет вид

$$F_x^{-1}(0, \lambda)g = \frac{g(t)}{\lambda} - \frac{3t}{\lambda(3\lambda + 1)} \int_0^1 sg(s) ds. \quad (5)$$

Теперь очевидно, что все условия приведенной выше теоремы выполнены.

1. $F(x, \lambda)$ и $F_x(x, \lambda)$ непрерывные операторы по x и λ .
2. $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \neq 0$. Из (5) следует оценка

$$F_x^{-1}(0, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

где $0 < |\lambda| < r$. Далее $F(0, 0) = 0$.

3. Используя (5), легко установить, что

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow 0, V \rightarrow 0} F_x^{-1}(0, \lambda) F_x(|\lambda|V, \lambda) = I.$$

4. $F(0, \lambda) = o(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Таким образом, все условия теоремы выполнены, следовательно, решение данного уравнения в окрестности точки $x = 0, \lambda = 0$ существует.

Библиографический список

1. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Сидоров, Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н. А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14. – С. 161–164.
3. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2007. – 488 с.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

К. К. Смаилов, В. А. Засов

Самарский государственный университет путей сообщения
г. Самара, Россия
e-mail: Kemr.smailoff@yandex.ru, vzasov@mail.ru

Многие прикладные задачи управления решаются на основе анализа математических моделей процессов и систем представленных в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее распространенным подходом к численному решению дифференциальных уравнений является метод конечных разностей или метод сеток [1]. Сеточные методы характеризуются большими временными затратами на решение, определяемыми величиной $T = kmN^2$, где N есть количество

узлов по каждой из координат области определения D уравнения, m - число операций, выполняемых для одного узла сетки, k - количество итераций метода до выполнения условий погрешности вычислений [1]. Одним из перспективных направлений повышения производительности при решении таких сложных задач является использование параллельных вычислительных систем (ВС) и параллельных алгоритмов решения дифференциальных уравнений.

Оценка эффективности применяемых параллельных алгоритмов производится на основе вычисления ряда показателей эффективности: ускорения $S_p(n)$; эффективности $E_p(n)$; стоимости $C_p(n)$ вычислений и др. [1,2], определяемых при использовании параллельного алгоритма для p процессоров (ядер) и числа узлов сетки N .

Следует заметить, что показатели эффективности параллельных алгоритмов являются противоречивыми и действия по повышению значений одного из показателей могут привести к ухудшению значения другого показателя. Например, повышение ускорения $S_p(n)$ обычно может быть обеспечено за счет увеличения числа p процессоров, что приводит, как правило, при фиксированной сложности задачи к уменьшению эффективности $E_p(n)$.

Поэтому важно определить минимальную сложность задачи (размер сетки), при которой для заданного числа процессоров (ядер) и ускорения обеспечиваются требуемые значения показателей эффективности.

Кроме того, эффективность параллелизма в значительной мере зависит от того, в какой мере параллельный алгоритм учитывает архитектуру конкретной параллельной ВС [1,2]. Параллельные программы сложнее последовательных и затраты на организацию информационного взаимодействия потоков существенно возрастают при увеличении степени распараллеливания, что негативно влияет на рост ускорения вычислений при увеличении числа потоков.

Таким образом, разработка и реализация систем для решения дифференциальных уравнений в частных производных в условиях заданных ограничений на время решения задачи и ресурсы вычислительных систем (производительности, объема памяти, стоимости, сложности, энергопотребления) сложная задача. Аналитические оценки показателей эффективности таких систем весьма приблизительны, поэтому для практических приложений более надежными являются показатели, полученные в результате вычислительных экспериментов.

Из вышесказанного следует актуальность проведения экспериментальных исследований эффективности параллельных алгоритмов решения дифференциальных уравнений, выполняемых на параллельных вычислительных системах различной архитектуры.

Задачей работы является вычисление и анализ экспериментальных зависимостей показателей эффективности различных параллельных ал-

горитмов решения дифференциальных уравнений от количества узловых точек и числа процессорных ядер.

Инструментом для решения этой актуальной задачи является созданный программный комплекс позволяющий выполнять вычислительные эксперименты для определения показателей эффективности различных параллельных алгоритмов решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В качестве примера применения комплекса рассмотрим численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, которая определяется как задача нахождения функции $u = u(x, y)$, удовлетворяющей в области определения D уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$
$$u(x, y) = g(x, y) \in D^0,$$

и принимающей значения $g(x, y)$ на границе D^0 области D , функции задаются при постановке задачи. Эта модель широко применяется для описания стационарных тепловых полей, процессов теплопередачи с внутренними источниками тепла, деформации упругих пластин и др. физических процессов.

Программный комплекс позволяет определять показатели эффективности параллельных алгоритмов и программ, выполняемых на многоядерных ВС, использующих технологию многопоточной обработки OpenMP. Для бортовых высокопроизводительных систем многоядерная архитектура ВС наиболее эффективна, а ограничение числа ядер (обычно до 8) в универсальных процессорах CPU преодолевается использованием графических процессоров (GPU) с числом ядер достигающим 10^3 .

В программном комплексе для увеличения масштабируемости параллельных алгоритмов применяется технология CUDA (Computer Unified Device Architecture) на основе применения графических процессоров GPU.

Разработанный программный комплекс позволяет:

- произвести выбор для моделирования из базы алгоритмов того или иного последовательного или параллельного алгоритма решения дифференциальных уравнений в частных производных: алгоритмов Гаусса-Зейделя с классической и волновой схемой расчета, алгоритмов Гаусса-Якоби, алгоритмы с чередованием обработки четных и нечетных строк, алгоритмы с шахматным разбиением области вычислений, с использованием технологии CUDA и др.;

- произвести выбор для моделирования размер и шаг сетки, количество потоков для проведения расчетов; произвести оценку ускорения и времени решения; вычислить зависимости времени решения от числа

узлов, а также от числа используемых ядер; получить сравнительные оценки времени проведения решения дифференциальных уравнений для разных видов алгоритмов; проводить вычислительные эксперименты с целью определения затрат на синхронизацию потоков, исключения неоднозначности вычислений и взаимной блокировки в параллельных алгоритмах; сформировать обзорные отчеты в табличной и графической форме по результатам вычислительных экспериментов.

Пользовательский интерфейс программного комплекса представлен на рис. 1, а примеры результатов вычислительных экспериментов в графической и табличной формах – на рис. 2, рис. 3 и таблице 1.

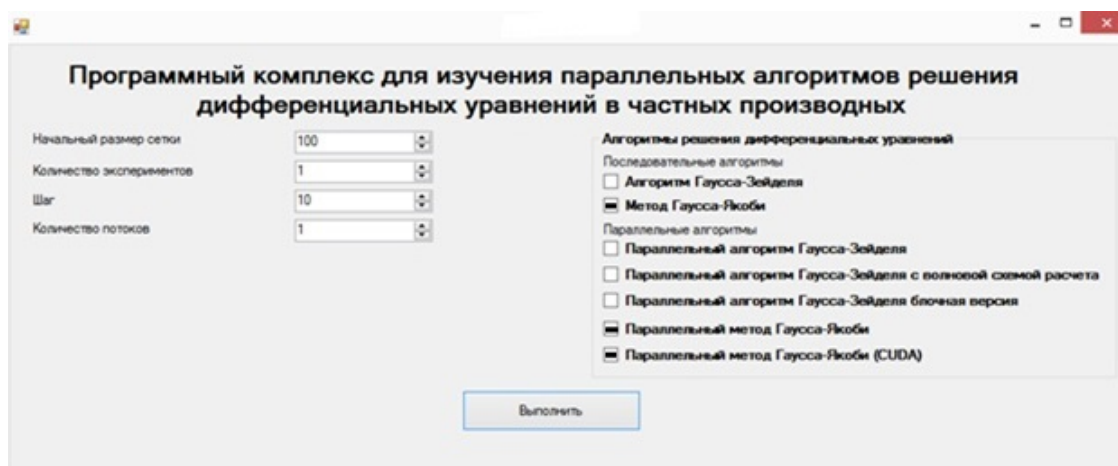


Рис.1. Интерфейс программного комплекса

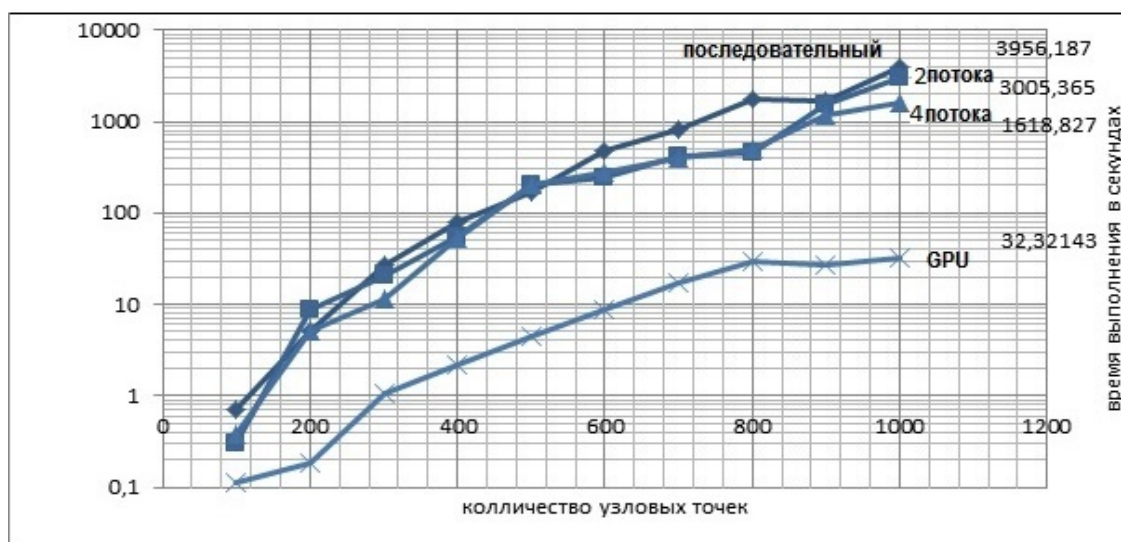


Рис. 2. Экспериментальные зависимости времени решения задачи Дирихле алгоритмом Гаусса – Якоби от числа ядер и количества узловых точек

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что рассмотренный параллельный алгоритм решения дифференциального уравнения Пуассона данных позволяет уменьшить время решения. С увеличением числа процессорных ядер ускорение решения также увеличивается, хотя до-

стигнутое ускорение заметно меньше числа вычислительных элементов (числа вычислительных потоков).

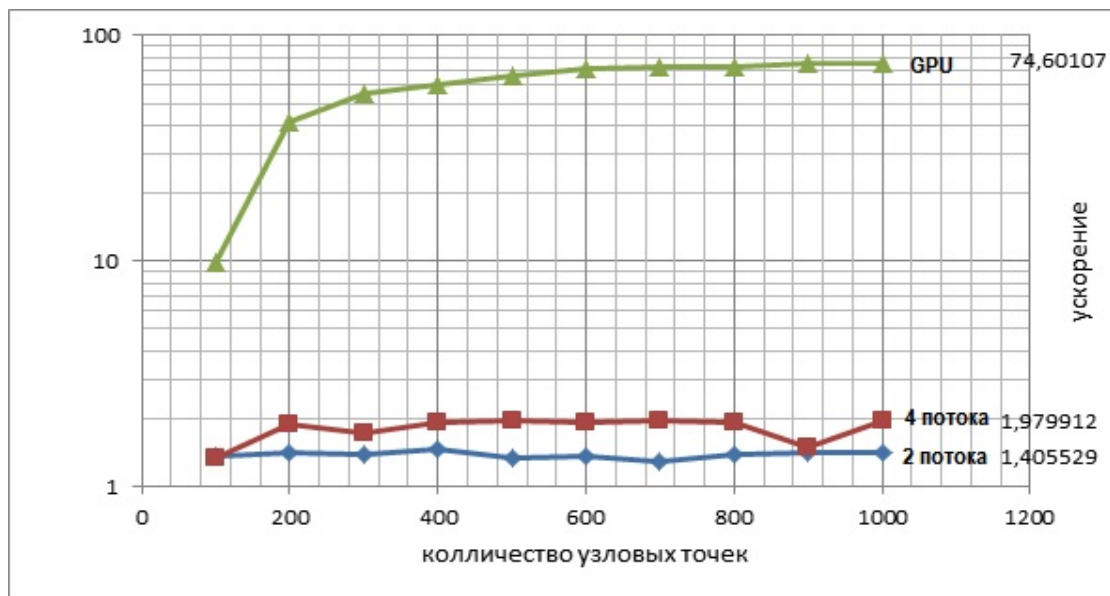


Рис. 3. Экспериментальные зависимости ускорения решения задачи Дирихле алгоритмом Гаусса-Якоби от числа ядер и количества узловых точек

Таблица 1

Время и ускорение решения дифференциального уравнения Пуассона параллельным алгоритмом Гаусса – Якоби в зависимости от числа ядер и количества узловых точек

Количество узловых точек дифференциальных уравнений	Последовательный метод Гаусса – Якоби	Параллельный метод Гаусса-Якоби					
		2 потока		4 потока		GPU	
		Время (сек)	Ускорение	Время (сек)	Ускорение	Время (сек)	Ускорение
100	0,703	0,295	1,376	0,383	1,351	0,112	9,778
200	5,142	8,824	1,427	5,031	1,883	0,186	41,177
300	27,457	20,65	1,389	11,395	1,724	1,046	55,765
400	79,22	54,22	1,477	53,883	1,942	2,224	60,269
500	169,70	202,38	1,331	206,06	1,965	4,453	66,552
600	470,10	243,78	1,372	276,01	1,945	8,707	71,637
700	824,59	426,28	1,300	395,27	1,952	17,536	72,756
800	1735,92	457,09	1,394	490,80	1,941	30,059	73,179
900	1683,66	1563,36	1,420	1168,41	1,977	27,168	74,755
1000	3956,18	3005,36	1,405	1618,82	1,979	32,321	74,601

Следует заметить, что отставание ускорения от числа вычислительных потоков заметно увеличивается с увеличением числа потоков: в среднем на 30 % и 50 % для 2 и 4 потоков соответственно. С другой

стороны, ускорение алгоритма сравнительно мало зависит от числа сортируемых элементов (рис. 3 и таблица 1).

Таким образом, в параллельном алгоритме затраты на реализацию межпроцессорной передачи данных столь значительны, что существенно снижают эффект от распараллеливания алгоритма. В этом алгоритме зависимость времени решения от количества узловых точек явно нелинейная, причем нелинейность имеет место при разном числе процессорных ядер.

Из этого следует, что одним из направлений исследований для достижения большего ускорения алгоритма является увеличение скорости обмена данными между процессорами или сокращение обменов между вычислительными потоками, т.е. увеличение степени их независимости. Последнее достигается переходом от архитектуры вычислительной системы с общей памятью на более сложную архитектуру MPI (message passing interface) с распределенной памятью.

Анализируя результаты вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что применение графических процессоров GPU (использовался GPU NVIDIA GeForce GTX 760 и команды библиотеки OpenACC) при решении дифференциальных уравнений дает существенный эффект по сравнению с многоядерными CPU. Важным достоинством применения GPU в алгоритме является увеличение ускорения при увеличении количества узловых точек.

Программный комплекс эффективно использовался при разработке систем мониторинга по динамическим параметрам крупномасштабных объектов транспортной инфраструктуры – рельсовых цепей, мостов, сортировочных горок [3]. Проведенные на комплексе вычислительные эксперименты позволили разработать программное обеспечение и выбрать оптимальную по соотношению «производительность-цена» архитектуру вычислительной системы для обработки в реальном времени сигналов системы автоматической локомотивной сигнализации [3,4], обеспечивающей безопасность движения поездов.

Библиографический список

1. Гергель, В. П. Теория и практика параллельных вычислений : учеб. пособие / В. П. Гергель. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 423 с.
2. Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация / Ю. К. Демьянович [и др.]. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 344 с.
3. Засов, В. А. Параллельные вычисления в задаче разделения сигналов в многомерных динамических системах / В. А. Засов, М. В. Ромкин // Параллельные вычисления и задачи управления, РАСО-2012 : тр. VI Междунар. конф. – М. : Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, 2012. – С. 96–102.

4. Засов, В. А. Контроль устойчивости и обеспечение робастности разделения сигналов в условиях вариации параметров объекта / В. А. Засов, Е. Н. Никоноров // Вестник Самарского муниципального института управления: теоретический и научно-методический журнал. – Самара : СМИУ, 2011. – № 1 (16). – С. 158–168.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О. В. Овчарёв

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: ow4arev@yandex.ru

Физические задачи, связанные с системами колебаний, наиболее часто описываются уравнениями в частных производных гиперболического типа. Уравнения данного типа отличаются конечной скоростью распространения возмущений в области интегрирования.

Рассмотрим некоторые методы решения подобных задач.

Метод характеристик. В качестве примера рассмотрим уравнение струны

$$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$$

Задача Коши: найти решение $u(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}, \quad u(x, y)|_{y=0} = -\sin x,$$

Составим уравнение характеристик для того, чтобы привести данное уравнение к каноническому виду

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0, \quad \text{где } A = 0, 2B = e^y, C = -1.$$

Решив уравнение, получаем

$$x = C_1 = \text{const}, e^y + x = C_2 = \text{const}.$$

Введем новые переменные $\xi = x, \eta = e^y + x$ и вычислим производные u_y, u_{yy}, u_{xy} функции u по переменным ξ и η , подставив их в (1) получаем $u_{\xi\eta} = 0$. В результате получаем общее решение уравнения гиперболического типа в характеристических координатах

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Вернемся к старым переменным x и y :

$$u(x, y) = f(x) + g(e^y + x)$$

Для нахождения неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$ получим систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} f(x) + g(x+1) = \frac{x^2}{2}, \\ g'(x+1) = -\sin x \end{cases}$$

В результате получаем

$$g(x+1) = \cos x + C, \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} - \cos x - C$$

Подставляя найденные функции $f(x)$ и $g(x+1)$

$$u(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \cos x - C + \cos(e^y + x - 1) + C$$

Получаем решение

$$u(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \cos x + \cos(e^y + x - 1)$$

Более подробно данный метод описан в [3,4]

Метод Галеркина. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[y(x, t)] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - K_1(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(x, t) u = g(x, t)$$

удовлетворяющее двум граничным условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t) \end{cases},$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x),$$

где $\gamma(x, t)$, $K_1(x, t)$ ($K_1 \geq 0$), $K_2(x, t)$, $\beta(x, t)$, $g(x, t)$ – заданные непрерывные на D функции; $a_2(t)$, $b_2(t)$ – дифференцируемые на $[0, \infty)$ функции; a_0, a_1, b_0, b_1 – заданные действительные числа, причем $a_0^2 + a_1^2 > 0$,

$b_0^2 + b_1^2 > 0$, $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе с $f'(x)$ и такая, что

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0); \end{cases}$$

$\varphi(x)$ – функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе со своей производной и такая, что

$$\begin{cases} a_0 \varphi(a) + a_1 \varphi'(a) = \frac{da_2(0)}{dt}, \\ b_0 \varphi(b) + b_1 \varphi'(b) = \frac{db_2(0)}{dt}. \end{cases}$$

Для нахождения приближенного решения данной задачи в методе Галеркина строится функциональная последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ из пробных решений $u_n(x, t)$ следующим образом. Задаемся в области D некоторой системой дважды дифференцируемых функций $u_0(x, t)$, $u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям, а пробные функции $u_i(x)$, при $(i \geq 1)$, являются линейно независимыми на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases}$$

Составляем функцию

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x)$$

Подставляя $u_n(x, t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение, получаем невязку

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial v_k}{\partial t} \right) u_k(x) + \\ & + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} - K_1(x, t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n v_k u_k'' \right) - \\ & - K_2(x, t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n v_k u_k' \right) \beta(x, t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^n v_k u_k \right) - g(x, t), \quad (4.7) \end{aligned}$$

Подставляя $u_n(x, 0)$, находим невязку

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x, 0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x).$$

Подставляя $\frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t}$, находим невязку

$$R_3\left(v_1(0), \dots, \dot{v}_n(0), x\right) = \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{v}_k(0) u_k(x) - \varphi(x).$$

Невязки R_1, R_2 и R_3 являются характеристиками отклонения функции от точного решения $U(x, t)$. Во всяком случае, если при некотором наборе функций $v_j(t)$ $R_1 \equiv 0$, $R_2 \equiv 0$, $R_3 \equiv 0$, то функция $u_n(x, t)$ – точное решение. При этом, функции $v_j(t)$ должны удовлетворять системе из n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Подробное описание данного метода можно найти в [1].

Итерационный метод. Постановка неклассической задачи.

В прямоугольнике $(0, l) \times (0, T)$ ищем функцию $u(x, t)$ – решение одномерного гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

Предположим, что концы колеблющейся струны $x = 0$, $x = l$ закреплены, т.е. выполняются однородные граничные условия первого рода:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

В начальный момент времени задана скорость точек струны, а в конечный момент времени — смещение струны

$$\partial u / \partial t(x, 0) = v(x), \quad u(x, T) = \square(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

В задаче (1) обозначим $\omega_{h\tau}$ множество внутренних узлов пространственно-временной сетки $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, m-1\}$; $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, n-1\}$; $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, m-1\}$. На множестве сеточных функций $y \in H$ таких, что $y(x) = 0$, $x \notin \omega_h$, определим сеточный оператор A соотношением

$$Ay = -(a(x)y_{\bar{x}})_x = -\frac{1}{h} \left(a(x+h) \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - a(x) \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right),$$

где $x \in \omega_h$.

Сначала от исходной неклассической задачи (1) – (3), применив дискретизацию по пространственной переменной, перейдем к задаче определения решения дифференциально-операторного уравнения [2]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} A y = 0, \quad x \in \omega_h, \quad 0 < t < T,$$

при заданных дополнительных условиях

$$\frac{dy}{dt}(0) = v, \quad y(T) = \varphi, \quad x \in \omega_h$$

При использовании симметричной трехслойной разностной схемы с весовым множителем σ дискретный аналог задачи имеет вид

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} + A(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) = 0, \quad t \in \omega_\tau$$

$$y(\tau) = y(0) + \tau v, \quad y(t_n) = \varphi, \quad x \notin \omega_h$$

где $0 \leq \sigma \leq 1$, применена без индексная система обозначений, введенная А.А. Самарским [5].

$$\hat{y} = y^{i+1}, \quad y = y^i, \quad \check{y} = y^{i-1}, \quad x \in \omega_h, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для численной реализации системы линейных алгебраических уравнений воспользуемся итерационным методом сопряженных градиентов, позволяющим уточнить смещение струны в начальный момент времени. На каждой итерации решается прямая задача для уравнения колебаний струны с помощью стандартной симметричной трехслойной разностной схемы, обладающей вторым порядком аппроксимации по h и τ .

Метод сопряженных градиентов:

1) Полагаем $k = 0$ и задаем начальное приближение искомой функции φ_k , $x \in \bar{\omega}_h$.

2) Запускаем счетчик итераций $k = k + 1$, последовательно решая прямые задачи

$$\frac{\hat{y}_k - 2y_k + \check{y}_k}{\tau^2} + A(\sigma \hat{y}_k + (1 - 2\sigma)y_k + \sigma \check{y}_k) = 0, \quad t \in \omega_\tau$$

с начальными условиями

$$y_k^0 = \varphi_k, \quad y_k^1 = \varphi_k + \tau v, \quad x \in \bar{\omega}_h$$

Аналогично выполняется вычисление вектора $z_k = A r_k$:

$$\frac{\hat{z}_k - 2z_k + \check{z}_k}{\tau^2} + A(\sigma \hat{z}_k + (1 - 2\sigma)z_k + \sigma \check{z}_k) = 0, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}$$

с начальными условиями

$$z_k^0 = r_k, \quad z_k^1 = r_k, \quad x \in \bar{\omega}_h$$

определяем невязку $r_k = y_k^m - \varphi$, $x \in \omega_h$, и вектор $z_k = Ar_k$, $x \in \omega_h$.

3) По рекуррентным формулам

$$\beta_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad \alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad \alpha_1 = 1$$

находим значения итерационных параметров β_{k+1} , α_{k+1} .

4) По формуле

$$\varphi_{k+1} = \alpha_{k+1} \varphi_k + (1 - \alpha_{k+1}) \varphi_{k-1} - \alpha_{k+1} \beta_{k+1} r_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

рассчитываем очередное приближение искомого начального условия $\varphi(x)_{k+1}$, $x \in \bar{\omega}_h$.

5) Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится критерий выхода из итерационного цикла $\|r_k\| < \varepsilon$, иначе продолжаем процесс, возвращаясь к пункту 2.

Гиперболические уравнения моделируют различные процессы в технике, физике, медицине (например, нестационарные уравнения течения несжимаемой жидкости в упруго деформируемых трубах описывают пульсовые течения крови в крупных кровеносных сосудах и воздуха в трахейно – бронхиальном тракте), экологии и т. д. Используя гиперболические уравнения, были решены множество задач прикладной математики. В данной работе были рассмотрены три метода решения гиперболических уравнений, а именно метод характеристик, итерационный и вариационный методы.

Библиографический список

1. Анкилов, А. В. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок : учеб. пособие / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семенов; под общ. ред. П. А. Вельмисова. – 2-е изд. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 179 с.
2. Васильев, В. И. Итерационное решение одной неклассической задачи для уравнения колебаний струны / В. И. Васильев, В. В. Попов, М. С. Еремеева, А. М. Кардашевский // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2015. – № 3. – С. 77–87.
3. Сабитов, К. Б. Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов / К. Б. Сабитов. – М. : Высш. шк., 2003. – 255 с.
4. Сабитова, Ю. К. Уравнения математической физики : учеб.-метод. пособие / Ю. К. Сабитов. – Sterlitaamak : Sterlitaamakskiy filial BashGU, 2014. – 91 с.
5. Самарский, А. А. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 119–127.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

А. Н. Тында, В. В. Кабулахин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: tynda@pnzgu.ru, weryman4eg-tdk@yandex.ru

1. Введение

Работа посвящена численному исследованию одного из классов функциональных уравнений с задержками – системам интегральных уравнений Вольтерра, ядра которых терпят конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле работ [2–5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек. В настоящей работе предлагается численный метод решения систем линейных интегральных уравнений I рода следующего вида

$$\int_0^t H(t,s)X(s)ds = F(t), \quad (1)$$

$$\text{где } H(t,s) = \begin{pmatrix} h_1(t,s) \\ h_2(t,s) \\ \vdots \\ h_n(t,s) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь ядра $h_i(t,s), i = \overline{1,n}$, терпят конечные разрывы на линиях $\alpha_j(t), j = \overline{1,n-1}$, и имеют вид

$$h_i(t,s) = \begin{cases} K_{i1}(t,s), & \alpha_0(t) < s \leq \alpha_1(t); \\ K_{i2}(t,s), & \alpha_1(t) < s \leq \alpha_2(t); \\ \dots & \\ K_{in}(t,s), & \alpha_{n-1}(t) < s \leq \alpha_n(t). \end{cases}$$

Компоненты $x_i(t), i = \overline{1,n}$, неизвестной функции $X(t)$ определены в областях $(\alpha_{i-1}(t), \alpha_i(t)]$, т.е. $X(t) = x_i(t), t \in \alpha_{i-1}(t) < s \leq \alpha_i(t)$.

Здесь $\alpha_0(t) \equiv 0, \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_n(t) \equiv t$, при $t \in (0, T)$, $\alpha_i(0) = f_i(0) = 0, i = \overline{1,n}$. Предполагается, что функции $K_{ij}(t,s)$ и $f_i(t), i, j = \overline{1,n}$, являются непрерывными и достаточно гладкими

функциями. Функции $\alpha_j(t) \in C^1[0, T]$ и являются неубывающими. Кроме того $\alpha_1'(0) \leq \alpha_2'(0) \leq \dots \leq \alpha_{n-1}'(0) < 1$. Теоретическое исследование уравнений такого типа проведено в [3].

Перейдем от формальной записи системы (1) к развернутой

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t, s) x_j(s) ds = f_1(t), \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t, s) x_j(s) ds = f_2(t), \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{nj}(t, s) x_j(s) ds = f_n(t). \end{array} \right. \quad (2)$$

Необходимость решения таких систем возникает, в частности, на каждом шаге итерационного метода решения нелинейных систем уравнений, описанного в [5].

2. Метод коллокации

Для построения численного решения системы (2) на отрезке $[0, T]$ (в условиях существования единственного непрерывного решения) введем сетку узлов (необязательно равномерную)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T, h = \max_{j=1, m} (t_j - t_{j-1}) = O(m^{-1}).$$

Приближенное решение системы (2) будем искать в виде вектор-функции

$$X^m(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^m A_{1j} t^j \\ \sum_{j=0}^m A_{2j} t^j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^m A_{nj} t^j \end{pmatrix}, t \in (0, T], \quad (3)$$

с неопределенными пока коэффициентами $A_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{0, m}$.

Для определения значений $A_{i0} = x_i(0), i = \overline{1, n}$, продифференцируем обе части каждого уравнения системы (2) по t

$$f'_i(t) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} \frac{\partial K_{ij}(t, s)}{\partial t} x_j(s) ds + \right. \\ \left. + \alpha_{j'}(t) K_{ij}(t, \alpha_j(t)) x_j(\alpha_j(t)) - \alpha_{j-1}'(t) K_{ij}(t, \alpha_{j-1}(t)) x_j(\alpha_{j-1}(t)) \right).$$

Используя последнее соотношение, приходим к необходимости решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n K_{1j}(0, 0) [\alpha_{j'}(0) - \alpha_{j-1}'(0)] A_{j0} = f'_1(0), \\ \sum_{j=1}^n K_{2j}(0, 0) [\alpha_{j'}(0) - \alpha_{j-1}'(0)] A_{j0} = f'_2(0), \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n K_{nj}(0, 0) [\alpha_{j'}(0) - \alpha_{j-1}'(0)] A_{j0} = f'_n(0). \end{cases} \quad (4)$$

относительно значений $A_{j0}, j = \overline{1, n}$. Здесь предполагается, что компоненты уравнения (2) таковы, что система линейных алгебраических уравнений (4) имеет единственное нетривиальное решение.

Для определения коэффициентов A_{ij} запишем каждое уравнение системы (2) в точке $t = t_k$.

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) x_j(s) ds = f_i(t_k). \quad (5)$$

Потребуем обращения (5) с учетом (3) в тождество:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) \left(\sum_{l=0}^m A_{jl} s^l \right) ds = f_i(t_k). \quad (6)$$

Поскольку коэффициенты $A_{j0}, j = \overline{1, n}$ уже известны, можем записать

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m A_{jl} \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) s^l ds = \\
& = f_i(t_k) - \sum_{j=1}^n A_{j0} \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) ds.
\end{aligned} \tag{7}$$

Введем для удобства следующие обозначения

$$F_{ik} = f_i(t_k) - \sum_{j=1}^n A_{j0} \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) ds; i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m} \tag{8}$$

$$C_{ikjl} = \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{\alpha_j(t_k)} K_{ij}(t_k, s) s^l ds; i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, l = \overline{1, m} \tag{9}$$

В итоге для определения коэффициентов A_{ij} приходим к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений размерности $(n \cdot m) \times (n \cdot m)$

$$C \cdot A = F. \tag{10}$$

Компоненты системы (10) можно представить следующим образом

$$C_{[(i-1) \cdot m + k][(j-1) \cdot m + l]} = C_{ikjl}; \tag{11}$$

$$A_{[(j-1) \cdot m + l]} = A_{jl}; \tag{12}$$

$$F_{[(i-1) \cdot m + k]} = F_{ik}; \tag{13}$$

где $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}$.

При этом для вычисления интегралов в (8), (9) используются составные формулы средних прямоугольников, построенные по вспомогательной сетке узлов, привязанной к линиям $\alpha_i(t)$ разрывов ядер $h_i(t, s), i = \overline{1, n}$. Таким образом, определив из системы (10) коэффициенты A_{ij} , получаем полиномиальную аппроксимацию компонентов приближенного решения $X^m(t)$.

3. Численные результаты

3.1. Система уравнений при $n = 2$

Для иллюстрации сходимости предложенного алгоритма рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t+s)x_1(s)ds + \int_{\frac{t}{2}}^t x_2(s)ds = f_1(t) \\ \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-s)x_1(s)ds - \int_{\frac{t}{2}}^t x_2(s)ds = f_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2], \quad (14)$$

где

$$f_1(t) = 1 + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{3t}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos(t),$$

$$f_2(t) = 1 + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(t).$$

Точным решением системы (14) являются функции $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = \sin(t)$.

Результаты численного решения системы (14) представлены в табл. 1, где m – порядок аппроксимирующих многочленов,

$$\varepsilon_i = \max_{t \in [0, a_i(T)]} |x_i^*(t) - x_i(t)|, \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

t_{max}^i – точка, в которой достигается наибольшая погрешность $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$.

Таблица 1

Результаты для задачи (14)

m	ε_1	t_{max}^1	ε_2	t_{max}^2	ε
2	$9.82294 \cdot 10^{-3}$	1.0	$6.72940 \cdot 10^{-2}$	2.0	$6.80072 \cdot 10^{-2}$
3	$1.60472 \cdot 10^{-3}$	1.0	$2.35676 \cdot 10^{-2}$	2.0	$2.36222 \cdot 10^{-2}$
5	$6.67315 \cdot 10^{-6}$	1.0	$3.95344 \cdot 10^{-4}$	2.0	$3.95400 \cdot 10^{-4}$
8	$1.72968 \cdot 10^{-8}$	1.0	$1.80165 \cdot 10^{-7}$	2.0	$1.80994 \cdot 10^{-7}$
12	$1.31014 \cdot 10^{-8}$	1.0	$4.12674 \cdot 10^{-9}$	2.0	$1.37360 \cdot 10^{-8}$
15	$2.79384 \cdot 10^{-8}$	1.0	$1.75046 \cdot 10^{-8}$	2.0	$3.29692 \cdot 10^{-8}$

3.2. Система уравнений при $n = 3$

Рассмотрим также еще одну систему с другим количеством линий разрыва

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{t}{3}} (1+t+s)x_1(s)ds + \int_{\frac{t}{3}}^{\frac{2t}{3}} x_2(s)ds + \int_{\frac{2t}{3}}^t (1+s)x_3(s)ds = f_1(t) \\ \int_0^{\frac{t}{3}} (1+t-s)x_1(s)ds - \int_{\frac{t}{3}}^{\frac{2t}{3}} x_2(s)ds + \int_{\frac{2t}{3}}^t (1-t)x_3(s)ds = f_2(t), \quad t \in [0, 2]. \quad (15) \\ \int_0^{\frac{t}{3}} (1+\frac{t}{5}+s)x_1(s)ds + \int_{\frac{t}{3}}^{\frac{2t}{3}} (1+t-s)x_2(s)ds - \int_{\frac{2t}{3}}^t (1+s)x_3(s)ds = f_3(t) \end{cases}$$

где функции $f_i(t), i=1,2,3$, подобраны таким образом, чтобы точными решениями системы являлись функции

$$x_1(t) = \cos(t), x_2(t) = \sin(t), x_3 = \frac{1}{4}\sin(t).$$

В табл. 2 приведены результаты численного решения системы (15).

Таблица 2

Результаты для задачи (15)

m	ε_1	t_{max}^1	ε_2	t_{max}^2	ε_3	t_{max}^3	ε
2	$1.75798 \cdot 10^{-3}$	0.6(6)	$3.30114 \cdot 10^{-3}$	1.3(3)	$6.72940 \cdot 10^{-2}$	2.0	$3.44752 \cdot 10^{-2}$
3	$2.75534 \cdot 10^{-4}$	0.6(6)	$3.77383 \cdot 10^{-3}$	1.3(3)	$4.51700 \cdot 10^{-3}$	2.0	$5.89245 \cdot 10^{-3}$
5	$1.68420 \cdot 10^{-6}$	0.6(6)	$2.89243 \cdot 10^{-5}$	1.3(3)	$9.1497 \cdot 10^{-5}$	2.0	$9.59747 \cdot 10^{-5}$
8	$7.8670 \cdot 10^{-10}$	0.6(6)	$6.86599 \cdot 10^{-9}$	1.3(3)	$4.15579 \cdot 10^{-8}$	2.0	$4.21286 \cdot 10^{-8}$
12	$1.33907 \cdot 10^{-9}$	0.6(6)	$1.55675 \cdot 10^{-9}$	1.3(3)	$1.9710 \cdot 10^{-10}$	2.0	$2.06287 \cdot 10^{-9}$
15	$1.69313 \cdot 10^{-9}$	0.6(6)	$1.00072 \cdot 10^{-9}$	1.3(3)	$1.43989 \cdot 10^{-9}$	2.0	$2.43750 \cdot 10^{-9}$

Таким образом, предложен достаточно эффективный метод решения систем вида (1) для относительно небольших значений T . При увеличении длины интервала планирования $[0, T]$ можно использовать полиномиальную сплайн-аппроксимацию решения, построенную на каждом участке аналогичным образом.

Библиографический список

1. Sidorov, D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In: L. O. Chua, ed. "World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A" / D. Sidorov. – Singapore : World Scientific Press. – 300 p.

2. Сидоров, Д. Н. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов // Вестник Южноуральского Государственного Университета. Серия «Математическое моделирование и программирование».. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 107–115.

3. Muftahov, I. Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels / I. Muftahov, D. Sidorov // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2016. – Vol. 9, 1. – Pp. 130–136.

4. Muftahov, I. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels / I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 313, 15. – Pp. 119–128.

5. Тында, А. Н. Итерационный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами / А. Н. Тында, В. В. Кабулахин // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XI Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С.151–159.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л. В. Тельнова, Н. Ю. Кудряшова*

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: math.kudryashova@yandex.ru, lila-ila@mail.ru

При осуществлении экспериментов по исследованию стационарных тепловых потоков часто нет возможности проводить измерения нужной величины напрямую, искомые характеристики можно восстановить по результатам косвенных измерений. Для подобного рода задач единственный путь нахождения требуемой физической величины состоит в решении обратных граничных задач теплопроводности.

1. Стационарная задача

Рассмотрим стационарное тепловое поле в однородном образце с прямоугольным сечением $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$

Тепловое состояние описывается уравнением Лапласа

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Выделим участок границы $\gamma = \{x | x \in \partial\Omega, x_2 = l_2\}$, на котором прямые измерения невозможны. Пусть $\partial\Omega \setminus \gamma = \Gamma + \gamma_*$ причем $\gamma_* = \{x | x \in \partial\Omega, x_\alpha = 0\}$.

Будем считать, что участки границы теплоизолированы, т.е. заданы однородные граничные условия второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \Gamma + \gamma_*. \quad (2)$$

Граничная обратная задача рассматривается в простейшей постановке, когда дополнительные температурные измерения выполнены на γ_* :

$$u(x) = g(x), x \in \gamma_*. \quad (3)$$

В поставленной обратной задаче (1) – (3) на γ_* заданы температура и поток. Поэтому мы можем рассматривать эту задачу как задачу продолжения температурного поля с γ_* во всю область Ω , т.е. как эволюционную задачу по пространственной переменной x_2 . Эволюционную переменную обозначим t (аналог времени) и пусть $x = x_1$. Тогда уравнение (1) переписется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = 0, 0 < t \leq T, 0 < x < l, \quad (4)$$

где $l = l_1$, $T = l_2$, а

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Граничные условия (2), (3) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, x = 0; l, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), 0 < x < l, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, 0 < x < l. \quad (8)$$

Для приближенного решения задачи (4) – (8) будем использовать метод квазиобращения. Приближенное решение $u_\alpha(x, t)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - Lu_\alpha + L^2 u_\alpha = 0, 0 < t \leq T, 0 < x < l, \quad (9)$$

дополненного условиями

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x = 0; l, \quad (10)$$

$$L \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x = 0; l, \quad (11)$$

$$u_\alpha(x, 0) = u^0(x), \quad 0 < x < l, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (13)$$

Для приближенного решения задачи (4)–(8) используются трех-
слойные разностные схемы:

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + Ay_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Для приближенного решения обратной задачи (4)–(8) введем по
переменной x равномерную сетку с шагом h , а по переменной t – сетку
с шагом τ . Определим

$$\Lambda v = \begin{cases} \frac{2}{h} v_{\bar{x}}, & x = l, \\ -v_{\bar{x}x}, & x \in \bar{\omega}, \\ -\frac{2}{h} v_x, & x = 0 \end{cases} \quad (15)$$

и перейдем к соответствующим дифференциально-разностным за-
дачам. При аппроксимации по переменной x с учетом (15) получим сле-
дующую дифференциально-разностную задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Lambda v + \alpha \Lambda \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad x \in \bar{\omega}, \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

$$v(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (18)$$

Трехслойная разностная схема с весами для (16) – (18) записы-
вается в виде:

$$(E + \alpha \Lambda) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y_n + \sigma_2 y_{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

при заданных y_1 и y_0 (например, естественно положить
 $y_0 = y_1 = u^0(x), \quad x \in \bar{\omega}$).

Схема (19) записывается в каноническом виде (14) при $B = \tau(\sigma_2 - \sigma_1)\Lambda$, $R = \frac{1}{\tau^2}(E + \alpha\Lambda) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\Lambda$, $A = -\Lambda$, где $C(T)$, $\lambda(T)$, $\varphi(x)$, $f(\tau)$, $q^*(\tau)$ - известные функции.

2. Нестационарная задача

Перейдем к рассмотрению граничной обратной задачи в нестационарной трактовке. Температуру тела с сечением Ω запишем следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (20)$$

Отметим, что заданные области $\partial\Omega \setminus \gamma$ также теплоизолированы:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma + \gamma_*, \quad 0 < t \leq T, \quad (21)$$

$$u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \gamma_*, \quad 0 < t \leq T. \quad (22)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (23)$$

Пусть

$$u(x, t) = \omega(x, t) + g(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (24)$$

где $g(x, t)$ будет продолжена с γ_* по всей области и выполнено условие

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma + \gamma_*, \quad 0 < t \leq T. \quad (25)$$

Получим следующую задачу для $\omega(x, t)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha^2} = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma + \gamma_*, \quad 0 < t \leq T, \quad (27)$$

$$\omega(x, t) = 0, \quad x \in \gamma_*, \quad 0 < t \leq T, \quad (28)$$

$$\omega(x, 0) = \omega^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (29)$$

Оператор L для гладких функций $\omega(x, t)$ определим из равенства:

$$L\omega = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha^2}, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (30)$$

Следовательно, граничную обратную задачу перепишем в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - L\omega = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (31)$$

Воспользуемся методом квазиобращения для решения (29) – (31). Возьмем за $\omega_\alpha(x, t)$ приближенное решение и найдем его из уравнения

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} - \alpha L^* L \omega_\alpha + L \omega_\alpha = f(x, t), \quad (32)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Запишем начальное условие в виде:

$$\omega_\alpha(x, 0) = \omega^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (33)$$

3. Нелинейная задача

Необходимо найти температурное поле из набора условий

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \quad (34)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, b]; \quad (35)$$

$$T(x, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]; \quad (36)$$

$$-\lambda(T(b, \tau)) \frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x} = q^*(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_m], \quad (37)$$

где $C(T)$, $\lambda(T)$, $\varphi(x)$, $f(\tau)$, $q^*(\tau)$ – известные функции.

Тогда есть необходимость в переходе от (1) к тождественному уравнению

$$\frac{1}{a(T)} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda'(T)}{\lambda(T)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m], \quad (38)$$

где $\lambda' = \frac{d\lambda}{dT}$.

Рассмотрим сетку $\{x_l = \Delta x l, \quad l = \overline{0, L}; \quad \tau_n = \Delta \tau n, \quad n = \overline{0, m}\}$ и перепишем (38), применяя неявную схему (рис. 1):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{ln} &= \frac{T_{l+1, n+1} - 2T_{l, n+1} + T_{l-1, n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2); \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{ln} &= \frac{T_{l+1, n} - T_{l-1, n}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2); \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \tau} \right|_{ln} = \frac{T_{l, n+1} - T_{l, n}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau), \end{aligned}$$

где $T_{ln} = T(\Delta x l, \Delta \tau n)$.

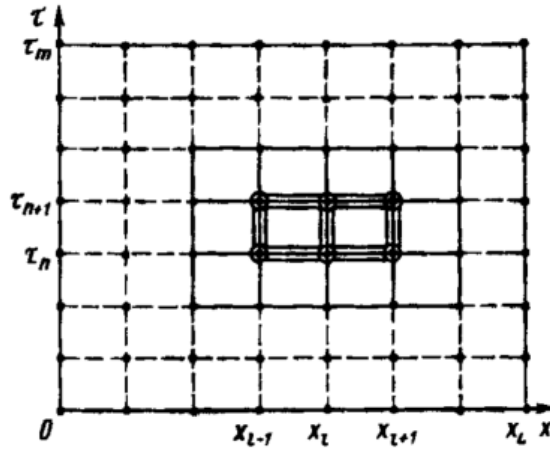


Рис. 1. Шаблон для уравнения теплопроводности

Отметим соотношения тепловых потоков $q(\tau)$ и $q^*(\tau)$, которые учитывают сохранение теплового потока в элементе, толщина которого Δx :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \lambda_{0n} \frac{T_{0,n+1} - T_{1,n+1}}{\Delta x} + C_{0n} \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{0,n+1} - T_{0n}}{\Delta \tau}; \\ q_{n+1}^* &= \lambda_{Ln} \frac{T_{L,n+1} - T_{L-1,n+1}}{\Delta x} + C_{Ln} \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{L,n+1} - T_{Ln}}{\Delta \tau}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $C_{ln} = C(T_{ln})$

Функцию, которая является дискретной и отвечает за начальное распределение температуры, представим так

$$T_{l0} = \varphi(x_l), \quad l = \overline{0, L}. \quad (40)$$

Уравнения (38)–(40) разрешают перейти к СЛАУ, с помощью которой и определится q_{n+1} и $T_{l,n+1}$ ($l = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, L$):

$$By = b, \quad (41)$$

где B – трехдиагональная матрица,

$$y = \left[z_L; T_{0,n+1}; T_{0,n+1}; \dots; T_{k-2,n+1}; T_{k-1,n+1}; T_{k+1,n+1}; T_{k+2,n+1}; \dots; T_{L,n+1}; \right]^T;$$

$$z_L = \frac{2\alpha_{0n}\Delta\tau}{\lambda_{0n}\Delta x} q_{n+1} + T_{0n}; \quad \alpha_{ln} = -\frac{\alpha_{ln}\Delta\tau}{\Delta x^2}, l = \overline{0, L-1}; \quad \alpha_{Ln} = -\frac{\alpha_{Ln}\Delta\tau}{\Delta x^2};$$

$$b = [0, b_1, b_2, \dots, b_L]^T; \quad b_{i|_{i=\overline{1, k-2}}} = b_{in}; b_{i|_{i=\overline{k-1, k+1}}} = b_{in} + T_{k,n+1} \frac{\alpha_{ln}\Delta\tau}{\Delta x^2};$$

$$b_k = \frac{2\alpha_{0n}\Delta\tau}{\lambda_{0n}\Delta x} q_{n+1} + T_{0n};$$

Таким образом, получим $q_{n+1} = \frac{\lambda_{0n}\Delta x}{2\alpha_{0n}\Delta\tau}(z_L - T_{0n})$.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1971. – 226 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 228 с.
3. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
4. Алифанов, О. М. Обратные задачи теплообмена. / О. М. Алифанов. – М. : Машиностроение, 1988. – 280 с.
5. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1973. – 415 с.

ПРИМЕНЕНИЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ

Н. С. Степанов, И. Ю. Алексеев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: ctnik1998@mail.ru, alekseew.ilya-2010@yandex.ru

В современное время фракталы находят всё больше применений в науке и технике. Это связано с тем, что порой они позволяют описать явления и объекты природы эффективнее, чем традиционные методы физики или математики. Так, на основе фракталов построен метод фрактального сжатия изображений, моделируются турбулентные потоки и пористые материалы, описывается кривизна поверхностей. Помимо этого, фракталы нашли применение и в телекоммуникациях – для передачи данных на расстояния используются антенны фрактальной формы, что уменьшает их размеры и вес, а также в компьютерной графике – с помощью фракталов можно генерировать линии и поверхности сложной формы.

В работе рассматривается один из методов, используемых для создания фракталов – аффинные преобразования.

Понятия фрактала и фрактальной геометрии, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского *fractus* и в переводе означает «состоящий из фрагментов». Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самопо-

добных структур, которыми он занимался. С математической точки зрения фрактал – это, прежде всего множество с дробной размерностью.

Мы хорошо представляем себе, что точка имеет размерность 0, отрезок и окружность – размерность 1, круг и сфера – размерность 2. С одномерными объектами мы связываем понятие длины, с двумерными – площади и так далее. Но как можно представить себе множество с размерностью $3/2$? Очевидно, для этого требуется нечто промежуточное между длиной и площадью, и если длину условно назвать 1-мерой, а площадь – 2-мерой, то требуется $(3/2)$ -мера [1].

В 1919 году Ф. Хаусдорф действительно определил такую α -меру и на этой основе каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Он же привел первые примеры множеств с дробной размерностью. Оказалось, что дробную размерность имеют канторово множество, кривая Коха и другие экзотические объекты, до недавнего времени малоизвестные за пределами математики [1].

Бенуа Мандельброт в своих книгах привел яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Мандельброт уделил большое внимание интересному свойству, которым обладают многие фракталы. Дело в том, что часто фрактал можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого. Иначе говоря, если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то с удивлением увидим ту же самую картину, что и без микроскопа. Это свойство самоподобия резко отличает фракталы от объектов классической геометрии.

Необходимо отметить, что свойство самоподобия характерно только для регулярных фракталов. Многие регулярные фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций – заменой одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Затем эта же операция повторяется с каждым из этих элементов, и так далее до бесконечности.

Определение фрактала, данное самим Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [2].

Напомним, что аффинным называется такое линейное преобразование, которое помимо поворота, отражения, сжатия и растяжения геометрических объектов, осуществляет ещё сдвиг их в пространстве (иногда говорят, трансляцию). Несмотря на то, что в примерах будут рассматриваться только преобразования на плоскости, т.е. из пространства R^2 в R^2 , результаты можно обобщить и на случай n -мерного пространства R^n .

Обозначим аффинное преобразование как T . В матричной форме общий вид запишется следующим образом:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В общем случае аффинное преобразование на плоскости задается шестью независимыми действительными числами. Два числа e и f описывают обычную трансляцию, а четыре числа a, b, c, d задают произвольное линейное преобразование при неизменном положении начала координат $(0,0)$.

Эти числа, которые являются параметрами или степенями свободы, можно определить, исходя из следующих соображений [3]: если необходимо отобразить три несовпадающие точки $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2)$, $(z_1; z_2)$ на три точки $(x'_1; x'_2)$, $(y'_1; y'_2)$, $(z'_1; z'_2)$, то коэффициенты a, b, c, d, e, f определяются из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2)$$

В некоторых случаях имеется и 7-й параметр – вероятность. Каждому из аффинных преобразований в системе ставится в соответствие некоторая вероятность, определяющая его относительную важность по сравнению с другими преобразованиями. В ходе нескольких тысяч итераций каждое аффинное преобразование должно использоваться много раз пропорционально назначенной вероятности. При каждой итерации уравнение выбирается случайным образом, но в среднем число раз, когда выбирается каждое уравнение, определяется вероятностями. В данной работе уравнения выбираются поочередно, без учёта вероятности, так как полагаются равнозначительными.

Очевидно, что при реализации аффинных преобразований на компьютере возникает проблема выбора системы координат. Поэтому применяются мировые координаты – декартова система координат, не зависящая от устройства и используемая программой для заданий графических данных.

Рассмотрим несколько примеров. Для компактности записи будем записывать коэффициенты системы в виде таблицы, а не в виде матриц.

Одним из наиболее наглядным примером преобразований переноса является треугольник («салфетка») Серпинского.

a	b	c	d	e	f
0.5	0	0	0.5	0	0
0.5	0	0	0.5	0.5	0
0.5	0	0	0.5	0.25	0.433

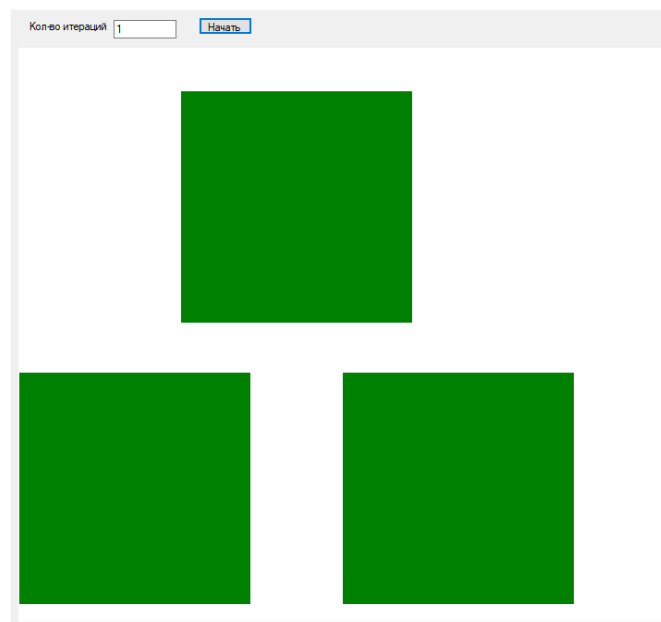


Рис. 1. 1-я итерация для треугольника Серпинского

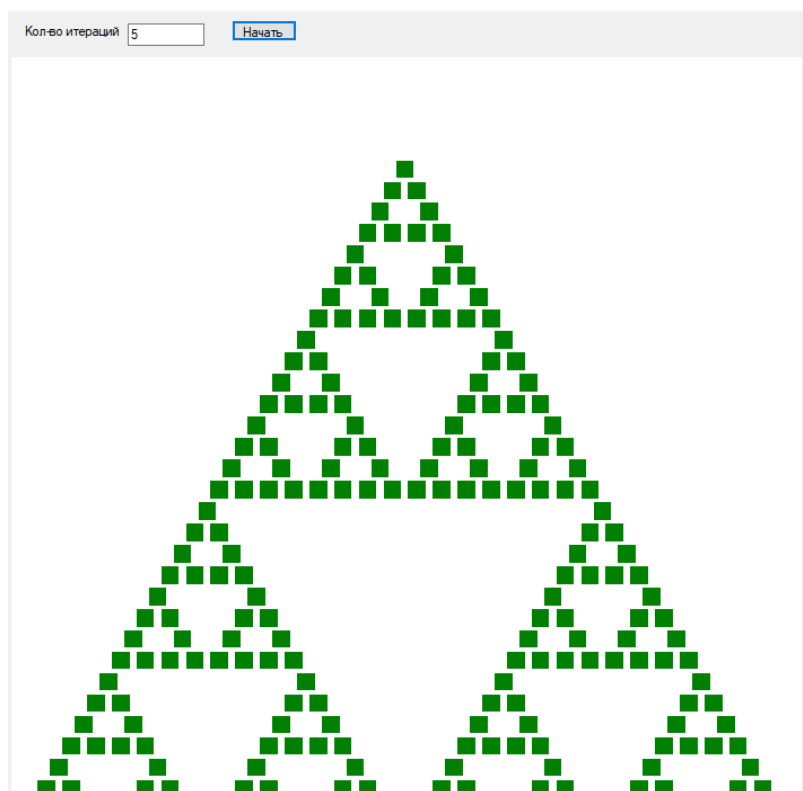


Рис. 2. 5-я итерация для треугольника Серпинского

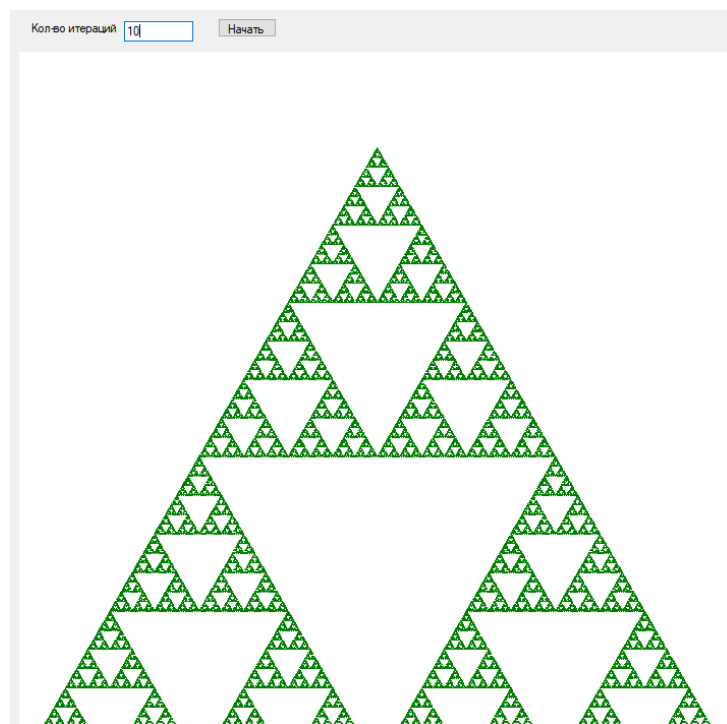


Рис. 3. 10-я итерация для треугольника Серпинского

Другое распространённое преобразование – преобразование поворота. Зададим фрактал «парашют», используя следующие коэффициенты:

a	b	c	d	e	f
0.336735	0.000000	0.000000	0.330097	-0.161633	0.610194
0.326531	0.000000	0.000000	0.330097	0.143265	0.610194
0.091837	-0.281553	0.336735	0.106796	-0.247188	0.551960
0.275510	-0.174757	0.214286	0.271845	-0.061759	0.370832
0.265306	0.184466	-0.204082	0.262136	0.041585	0.372231
0.102041	0.300971	-0.336735	0.097087	0.222962	0.545807
0.326531	0.000000	0.010204	0.339806	-0.006735	0.104714

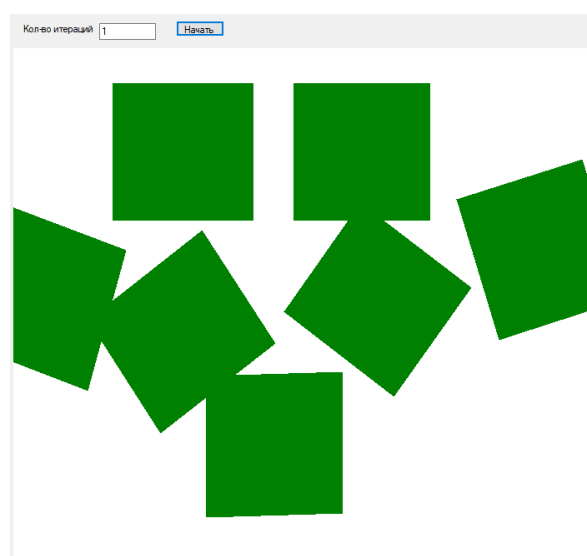


Рис. 4. 1-я итерация для «парашюта»

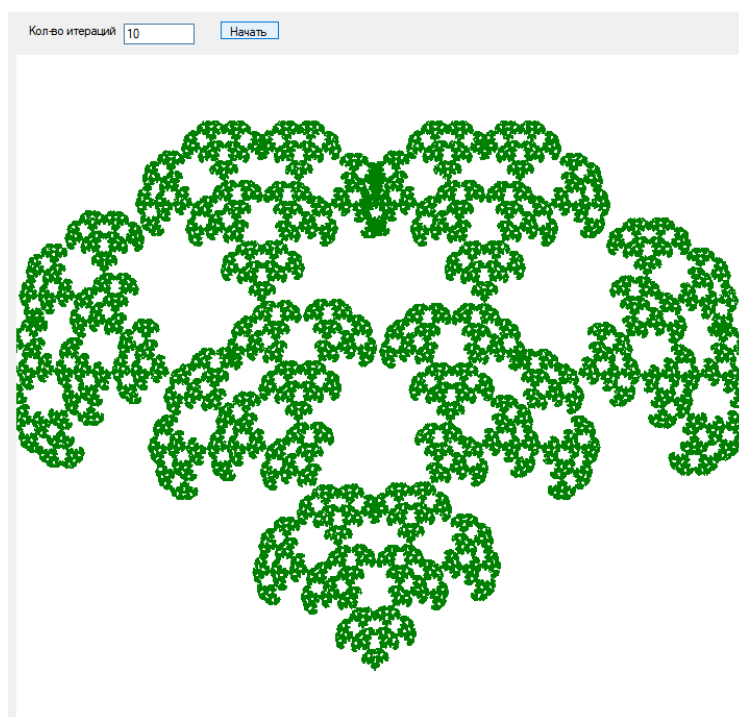


Рис. 5. 10-я итерация для «парашюта»

Библиографический список

1. Турбин, А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. – Киев : Наук. думка, 1992. – 195 с.
2. Федер, Е. Фрактал / Е. Федер ; пер. с англ. – М. : Мир. 1991. – 254 с.
3. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.

СГЛАЖИВАЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА

А. Н. Тында, Д. В. Сальников

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru, dimoshka96@gmail.com

1. Введение

Одним из подходов, применяемых при решении слабосингулярных интегральных с решениями, производные которых имеют неограниченные производные на левом конце интервала интегрирования, является использование неравномерных сеток [1–3]. Однако при использовании существенно неравномерных сеток могут возникнуть значительные ошибки округления, что значительно ухудшает численные результаты.

В данной работе рассматривается другой подход. Сначала мы регуляризируем решение интегрального уравнения, введя подходящую новую независимую переменную, а затем решаем преобразованное уравнение классическими методами на равномерной или слегка неравномерной сетке. Такой подход широко известен (см., например, работы [4–6]), однако в большинстве случаев в литературе рассматриваются преобразования, предназначенные для конкретных типов уравнений. В данной работе изложим общий метод сглаживания для широкого класса слабо-сингулярных интегральных уравнений Вольтерра и приведем численные результаты, подтверждающие его эффективность.

2. Постановка задачи

Для $b \in R = (-\infty, \infty)$, $b > 0$, обозначим

$$D_b = \{(x, y) : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y < x\}.$$

Рассмотрим линейное интегральное уравнение вида

$$u(x) = \int_0^x K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [0, b], \quad (1)$$

где $K \in W^{m, \nu}(D_b)$, $f \in C^{m, \nu}[0, b]$, $m \in N = 1, 2, \dots$, $\nu \in R$, $\nu < 1$.

Здесь $W^{m, \nu}(D_b)$, $m \in N$, $\nu < 1$, определяется в работе [7] как множество всех m раз непрерывно дифференцируемых функций $K : D_b \rightarrow R$ удовлетворяющее

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^j K(x, y) \right| \leq c \begin{cases} 1, & \nu + i < 0, \\ 1 + |\log(x - y)|, & \nu + i = 0, \\ (x - y)^{-\nu - i}, & \nu + i > 0, \end{cases} \quad (2)$$

с константой $c = c(K)$ для всех $(x, y) \in D_b$ и всех неотрицательных чисел i и j таких, что $i + j \leq m$. Из (2) (с $i = j = 0, 0 \leq \nu < 1$) следует, что $K(x, y)$ может иметь слабую особенность при $y \rightarrow x$. В случае $\nu < 0$, ядро K ограничено на D_b , но его производные могут иметь особенность при $y \rightarrow x$. В частности, K может быть задано в форме

$$K_{\alpha, \beta}(x, y) = k_1(x, y)(x - y)^{-\alpha} |\log(x - y)|^\beta + k_2(x, y), \quad 0 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0,$$

с некоторыми m раз непрерывно дифференцируемыми функциями $k_i : \overline{D_b} \rightarrow R$ ($i = 1, 2$) где $\overline{D_b} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq b\}$.

Лемма 2.1 Если $K \in W^{m, \nu}(D_b)$, $f \in C^{m, \nu}[0, b]$, $m \in N$, $\nu \in R$, $\nu < 1$, тогда решение уравнения (1) имеют единственное решение $u \in C^{m, \nu}[0, b]$.

С доказательством всех лемм, встречающихся в работе, можно ознакомиться в статье [7].

3. Сглаживающее преобразование

Для данного $m \in N$, $0 < a \in R$, $0 < b \in R$, $1 \leq d \in R$ пусть

$$\phi: [0, a] \rightarrow [0, b] \quad (3)$$

преобразование, которое отображает $[0, a]$ на $[0, b]$ и такое, что

$$\phi \in C^m[0, a]. \quad (4)$$

$$c_1 t^{d-1} \leq \phi'(t) \leq c_2 t^{d-1}, \quad 0 \leq t \leq a, \quad (5)$$

$$|\phi^{(j)}(t)| \leq c t^{d-j}, \quad 0 \leq t \leq a, \quad 0 \leq j \leq \min\{d, m\}, \quad (6)$$

где $c_2 \geq c_1 > 0$ и $c > 0$ некоторые константы. Следствием (5) является

$$|\phi(t) - \phi(s)| \geq c_0 |t - s| (t^{d-1} + s^{d-1}), \quad s, t \in [0, a], \quad (7)$$

с константой $c_0 > 0$, которая не зависит от $t, s \in [0, a]$.

В случае $d = 1$ преобразование (3) изоморфно. Нас интересуют преобразования ϕ с $d > 1$, поскольку они обладают сглаживающим свойством для решения $u(\phi(t))$ с особенностью при $x = 0$.

Простейший пример функции ϕ , удовлетворяющей (3)–(6), задаётся формулой

$$\phi(t) = b a^{-d} t^d, \quad 0 \leq t \leq a, \quad (8)$$

с $d \in N$ в случае $d \leq m$ и $d \in R$ в случае $d > m$. Класс преобразований задается функциями

$$\phi \in C^n[0, a], \quad n \geq m, \quad (9)$$

удовлетворяющими

$$\phi'(t) > 0, \quad 0 < t \leq a. \quad (10)$$

$$\phi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, d-1; \quad \phi^{(d)}(0) \neq 0, \quad N \ni d \leq n. \quad (11)$$

Конкретный пример, удовлетворяющий (9)–(11), и часто применяемый на практике, задается формулой

$$\phi(t) = 2^{d/2} b \left(\sin \left(\frac{\pi}{4a} t \right) \right)^d, \quad N \ni d \leq n. \quad (12)$$

Лемма 3.1 Пусть выполнены следующие условия:

- $u \in C^{m,v}[0, b]$, $m \in N$, $b \in R$, $v < 1$, $b > 0$;

- $\phi: [0, a] \rightarrow [0, b]$ – преобразование, которое отображает $[0, a] (a > 0)$ на $[0, b]$ и удовлетворяет условиям (4)-(6), где $d \in N$ в случае $d \leq m$ и $d \in R$ в случае $d > m$;
- $v(t) = u(\phi(t)), t \in [0, a]$.

Тогда $v \in C^{m, v_d} [0, a]$ с

$$v_d = 1 - d(1 - v). \quad (13)$$

4. Аппроксимация

Для данного $m \in N$, $0 < a \in R$, $0 < b \in R$, $1 \leq d \in R$ пусть $\phi: [0, a] \rightarrow [0, b]$ преобразование, которое отображает $[0, a]$ на $[0, b]$ и удовлетворяет условиям (4)-(6). Введя в (1) замену переменных

$$y = \phi(s), \quad x = \phi(t), \quad (t, s \in [0, a]), \quad (14)$$

мы получим интегральное уравнение вида

$$u_\phi(t) = \int_0^t K_\phi(t, s) u_\phi(s) ds + f_\phi(t), \quad t \in [0, a], \quad (15)$$

где $f_\phi(t) = f(\phi(t))$ и

$$K_\phi(t, s) = K(\phi(t), \phi(s)) \phi'(s) \quad (16)$$

некоторые заданные функции и $u_\phi(t) = u(\phi(t))$ – искомая функция. Используя (16), введем интегральный оператор T_ϕ

$$(T_\phi z)(t) = \int_0^t K_\phi(t, s) z(s) ds, \quad t \in [0, a]. \quad (17)$$

Лемма 4.1 Пусть $K \in C^{m, v}(D_b)$, $m \in N$, $v \in R$, $v < 1$, и предположим, то ϕ удовлетворяет условиям (4)-(6) с $d > 1$. Тогда T_ϕ компактный оператор, действующий из $L^\infty(0, a)$ на $C[0, a]$ и $L^\infty(0, a)$.

Уравнение (15) можно решить классическими методами. Например, при решении данного уравнения методом коллокации, имеет место следующая оценка погрешности [7]

$$\sup_{x \in [0, b]} |u_N(x) - u(x)| \leq c \epsilon_N^{(m, v_d, r)}, \quad (18)$$

где $v_d = 1 - d(1 - v)$, $v < 1$, а $\epsilon_N^{(m, v_d, r)}$ определено в [7].

Мы же предлагаем решать данное уравнение методом последовательных приближений:

$$u_\phi^{(m+1)}(t) = \int_0^t K_\phi(t, s) u_\phi^{(m)}(s) ds + f_\phi(t), \quad t \in [0, a], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Интеграл в уравнении (19) будем аппроксимировать методом, предложенным в [9,8]. Запишем ядро с особенностью в общем виде

$$\int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (20)$$

Разобьем отрезок $[a, t]$ на $n+1$ узлов

$$s_{n-k} = a + (t-a) \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{m+1}{1+\alpha}} \right), k = 0, 1, \dots, n. \quad (21)$$

На каждом сегменте $s_{k-1} \leq s \leq s_k, k = 1, 2, \dots, n$ аппроксимируем интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с $[m/2] + 1$ узлами

$$s_k^j = \frac{s_k + s_{k-1}}{2} + \frac{s_k - s_{k-1}}{2} y_j, j = 1, 2, \dots, [m/2] + 1$$

где y_j – нули многочлена Лежандра степени $[m/2] + 1$ (квадратные скобки обозначают целую часть).

Тогда мы имеем

$$\int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^\alpha} ds = \sum_{k=1}^n \frac{s_k - s_{k-1}}{2} \sum_j^{[m/2]+1} W_j \frac{h(t, s_k^j)}{(t - s_k^j)^\alpha} + R_n, \quad (22)$$

где весовые коэффициенты W_j и узлы y_j заданы таблично, а теоретическая погрешность формулы определяется формулой

$$R_n = O\left(\frac{t-a}{n}\right)^{m+1}.$$

Однако применение этой формулы на практике при достаточно большом n приводит к значительным ошибкам округления. Поэтому мы модифицируем формулу (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^\alpha} ds &= \int_a^t \frac{h(t,s) - h(t,t)}{(t-s)^\alpha} ds + \int_a^t \frac{h(t,t)}{(t-s)^\alpha} ds = \\ &= \int_a^t \frac{h(t,s) - h(t,t)}{(t-s)^\alpha} ds + \frac{h(t,t)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{h(t,t)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{s_k - s_{k-1}}{2} \sum_j^{[m/2]+1} W_j \frac{h(t, s_k^j) - h(t,t)}{(t - s_k^j)^\alpha} + O\left(\frac{t-a}{n}\right)^{m+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку размер величины $(t-a)$ может быть достаточно малым при больших числах N , примем $n = [(t-a)N] + 1$.

Тогда оценка погрешности формулы (23) примет вид $O(N^{-(m+1)})$.

После того, как мы решим уравнение (19) и найдем функцию $u_\phi(t)$ можно найти искомое приближенное решение $u(t) = u_\phi(\phi^{-1}(t))$.

5. Численные результаты

Рассмотрим уравнение вида (1) в котором заданы следующие функции

$$K(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{(x - y)^\alpha}, \quad f(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{3/2}, \quad u(x) = \sqrt{x}, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

и сглаживающее преобразование вида $\phi(t) = b^{1-d}t^d$, $b = 1$, $d = 2$.

Были получены следующие результаты для $n = 30$ в формуле (21), N - число разбиений отрезка, M - число итераций в методе последовательных приближений.

Таблица 1

Погрешность до и после применения сглаживающего преобразования

	ε_{max}	ε_{max}^ϕ
M=10		
N=10	4.853299e-002	3.206416e-002
N=20	3.426980e-002	3.218954e-002
N=30	3.221590e-002	3.220022e-002
M=20		
N=10	4.853299e-002	6.750857e-006
N=20	3.426980e-002	6.897699e-006
N=30	2.796825e-002	6.916877e-006
M=30		
N=10	4.853299e-002	2.102474e-010
N=20	3.426980e-002	2.259954e-010
N=30	2.796825e-002	2.276308e-010

Библиографический список

1. Brunner, H. The numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes, Math. Comp.45 / H. Brunner. – Pp. 417–137 (1985).
2. Brunner, H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations / H. Brunner. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
3. Тында, А. Н. Эффект сверхсходимости в численных методах решения интегральных уравнений второго рода / А. Н. Тында, Д. В. Сальников : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2017.

4. Abdalkhani, J. A modified approach to the numerical solution of linear weakly singular Volterra integral equations of the second kind, J. Integral Equations / J. Abdalkhani. – 1993. – Appl. 5(2). – Pp.149–166.
5. Diogo, T. Collocation methods for second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels / T. Diogo, S. McKee, T. Tang. – Proc. Roy. Soc. Edinburgh 124A. – 1994. – Pp. 199–210.
6. Pedas, A. Numerical solution of weakly singular Volterra integral equations with change of variables / A. Pedas, G. Vainikko. – Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 53(2). – 2004. – Pp. 99–106.
7. Pedas A., Vainikko G., Smoothing Transformation and Piecewise Polynomial Collocation for Weakly Singular Volterra Integral Equations, Computing 73 / A. Pedas, G. Vainikko. – 2004. – Pp. 271–293.
8. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды СВМО. – 2008. – Т. 10, № 1.
9. Kaneko, H. Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and the application to Fredholm integral equations of the second kind / H. Kaneko, Y. Xu. – Math. Comp. – 1994. – Vol. 62. – Pp. 739–753.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru,
math.kudryashova@yandex.ru

1. Метод регуляризации Тихонова

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона первого рода (1.1) и нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна первого рода (1.2)

$$Ay \equiv \int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1)$$

$$Ay \equiv \int_a^b K(x, s) \varphi(s, y(s)) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2)$$

Известно, что решение таких уравнений представляет собой некорректную задачу.

Предполагается, что ядра $K(x, s)$, $K(x, s, y(s))$ – вещественные непрерывные функции в области $G = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, причем ядро $K(x, s, y(s))$ и функция $\varphi(s, y(s))$ непрерывны в области G вместе со своими первыми производными по переменной $y(s)$, а функции $f(x)$, $y(s) \in L_2[a, b]$.

Для решения нелинейных интегральных уравнений (1.1), (1.2) применим метод регуляризации Тихонова. Данный метод был рассмотрен ранее в работах [1, 2], где решение нелинейных интегральных уравнений Урысона (1.1) и Гаммерштейна (1.2), с помощью регуляризации по Тихонову сводились к решению двух нелинейных систем алгебраических уравнений модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Решение модельных задач показало эффективность и устойчивость данного метода.

2. Метод механических квадратур

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$y(x) - \int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.1)$$

где будем предполагать, что $K(x, s, y(s))$ – это вещественная непрерывная функция в области $G = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, причем ядро $K(x, s, y(s))$ непрерывно в области G вместе со своими первыми производными по переменной $y(s)$, а функции $f(x)$, $y(s) \in L_2[a, b]$.

Построим вычислительную схему для решения (2.1).

В основе метода механических квадратур лежит применение некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \varphi(x_j) + R(\varphi), \quad (2.2)$$

где x_j , $j = \overline{1, n}$ – абсциссы, принадлежащие отрезку $[a, b]$; A_j – коэффициенты, не зависящие от функции $\varphi(x)$; $R(\varphi)$ – ошибка замены интеграла суммой.

Применим квадратурную формулу (2.2) к уравнению (2.1), получим равенство

$$y(x) = \sum_{j=1}^n A_j K(x, s_j, y(s_j)) + R(x) + f(x), \quad (2.3)$$

где $R(x) = \int_a^b K(x, s, y(s)) ds - \sum_{j=1}^n A_j K(x, s_j, y(s_j))$.

Далее полагая в уравнении $x = x_i$, $i = \overline{1, n}$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений следующего вида

$$y(x_i) = \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j, y(x_j)) + R(x_i) + f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Введем обозначения $f(x_i) = f_i$, $y(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n}$ и отбросим малую величину $R(x_i)$, тогда приходим к системе нелинейных уравнений (2.5) относительно искомой функции в узлах квадратурной формулы

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j, y_j) + f_i. \quad (2.5)$$

Будем решать полученную систему (2.5) методом Ньютона-Канторовича [4].

3. Метод вырожденных ядер

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна

$$y(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s, y(s)) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

где будем предполагать, что ядро $K(x, s)$ – это вещественная непрерывная функция в области $G = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, и функция $\varphi(s, y(s))$ непрерывна в области G вместе со своими первыми производными по переменной $y(s)$, а функции $f(x)$, $y(s) \in L_2[a, b]$.

Построим вычислительную схему для решения (3.1).

Предположим, что уравнение второго рода (3.1) имеет вырожденное ядро вида

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (3.2)$$

где $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(s)$, $i = \overline{1, n}$, – системы линейно независимых между собой функций. Если ядро $K(x, s)$ невырожденное, то его приближенно можно

заменить вырожденным $K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s)$.

Подставим (3.2) в уравнение (3.1), тогда оно примет вид

$$y(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \varphi(s, y(s)) ds = f(x). \quad (3.3)$$

Если ввести обозначения

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) \varphi(s, y(s)) ds, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

то решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (3.5)$$

где постоянные c_i неизвестны, и задача решения исходного нелинейного интегрального уравнения сводится к их определению путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Подставим (3.5) в (3.4) и получим систему нелинейных алгебраических уравнений (3.6) относительно c_i

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) \varphi \left(s, f(s) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(s) \right) ds, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

После аппроксимации интеграла в (3.6), получим систему из n нелинейных алгебраических уравнений, используемых для нахождения неизвестных c_i . Систему уравнений будем решать методом Ньютона-Канторовича [4].

4. Численные методы решения нелинейные сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau + \int_{\gamma} h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad t \in \gamma, \quad (4.1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости.

С помощью преобразования Гильберта от уравнения (4.1) можно перейти к уравнению, которое для простоты выкладок будем рассматривать в следующем виде

$$a(s)x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(s, \sigma, x(\sigma)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s, \sigma, x(\sigma)) d\sigma = f(s), \quad (4.2)$$

где будем предполагать, что $x(s) \in H_{\alpha}$, $b'_3(s, \sigma, x(\sigma)) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, b'_3 – производная по третьей переменной.

Первая вычислительная схема для решения уравнения (4.2) была построена и реализована в работе [3], где решение нелинейного сингулярного интегрального уравнения (4.2) сводилось к решению нелиней-

ной системы алгебраических уравнений модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Решение модельных задач показало эффективность и устойчивость данного метода.

Построим вычислительную схему для решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения первого рода

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(s, \sigma, x(\sigma)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s, \sigma, x(\sigma)) d\sigma = f(s), \quad (4.3)$$

основанную на методе регуляризации Тихонова, описанного в работе [2].

Выберем две системы узлов: $t_k = \frac{\pi k}{n}$, $t_k^* = \frac{\pi k}{n} + h$, $0 < h < \frac{\pi}{2n}$, $k = 0, \dots, 2n - 1$.

Пусть оператор A описывает уравнение (4.3). Тогда использование условия минимума так называемого сглаживающего функционала $\Phi_\alpha(y) = \|Ay - f\|_{L_2}^2 + \alpha \|y\|_{L_2}^2 \rightarrow \min_{y \in L_2[a, b]}$, где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, для определения которого воспользуемся [2], приводит к регуляризованному интегральному уравнению второго рода

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a(t)x_\alpha(t) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} b'_3(s, t, x(t)) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} \int_0^{2\pi} b(s, \sigma, x(\sigma)) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma ds = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b'_3(s, t, x(t)) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для аппроксимации сингулярных интегралов в уравнении (4.4) воспользуемся квадратурной формулой специального вида. Далее к уравнению применяем метод механических квадратур по узлам t_k^* , $k = 0, \dots, 2n - 1$ и получаем систему нелинейных алгебраических уравнений вида (4.5)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a(t_k^*)x(t_k^*) + \frac{1}{4\pi^2} \times \\ \times \sum_{i=0}^{2N-1} \left[b'_x(t_i^*, t_k^*, x(t_k^*)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \operatorname{ctg} \frac{t_k^* - s}{2} ds \cdot \sum_{j=0}^{2N-1} b(t_i^*, t_j^*, x(t_j^*)) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - t_i^*}{2} d\sigma \right] = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{2N-1} b'_x(t_i^*, t_k^*, x(t_k^*)) f(t_i^*) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \operatorname{ctg} \frac{t_k^* - s}{2} ds, \quad k = 0, \dots, 2N - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для решения системы (4.5) воспользуемся методом Ньютона-Канторовича [4].

5. Численные методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений на отрезках

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \quad (5.1)$$

где $f(t)$, $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha$.

Построим вычислительную схему для решения уравнения (5.1).

Выберем три системы узлов: $t_k = -1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, 2n$, $t_j^* = t_j + h$,

$j = 1, 2, \dots, n-1$, $t_j^* = t_{j+1} - h$, $j = n, n+1, \dots, 2n-2$, $0 < h < \frac{1}{2n}$.

Далее будем рассматривать характеристическое уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1. \quad (5.2)$$

Для вычисления сингулярного интеграла в уравнении (5.2) воспользуемся квадратурной формулой специального вида при $t \in (t_j, t_{j+1})$, далее применяем метод механических квадратур по узлам коллокации t_k^* , $k = 1, \dots, 2n-2$ и получим систему нелинейных алгебраических уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{b(t_j^*, t_1^*, x(t_1^*))}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2, k \neq j-1, j+1}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{b(t_j^*, t_k^*, x(t_k^*))}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{b(t_j^*, t_{2n-2}^*, x(t_{2n-2}^*))}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = f(t_j^*), \quad j \neq 1, 2, 2n-2, 2n-3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Остальные уравнения при других значениях индекса j выглядят аналогично, но из-за громоздкости не приводятся. Для решения системы (5.3) воспользуемся методом Ньютона – Канторовича [4].

Библиографический список

1. Шалдаева, А. А. Приближенное решение нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна первого рода методом регуляризации / А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 86–89.

2. Шалдаева, А. А. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений первого рода методом регуляризации по Тихонову / А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 106–110.

3. Шалдаева, А. А. Об одном численном методе решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши / А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018.

4. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1984.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Тында, К. А. Тимошенко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: tyndaan@mail.ru, timoshenkov.ka@yandex.ru

1. Введение

В настоящей работе реализуется метод граничных интегральных уравнений при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Согласно этому методу решение уравнения в частных производных в некоторой области сводится к решению интегрального уравнения по его границе.

Такой подход исследовался разными авторами (см., например, [1, 3, 4]). К преимуществам данного подхода можно отнести его универсальность и снижение размерности задачи на единицу. Это особенно актуально при решении внешних граничных задач, когда решение требуется найти в неограниченной области, т.к. метод позволяет перейти к уравнениям по конечной границе Γ .

Получаемые при этом интегральные уравнения возможно решить аналитически лишь в ряде тривиальных случаев, в связи с чем необходимо построение численных методов решения данных уравнений. Кроме того, существенной проблемой здесь является наличие у ядер получаемых уравнений особенностей: получаемые граничные уравнения (в случае Ляпуновских кривых и поверхностей, ограничивающих рассматриваемую область) будут слабосингулярными.

В данной работе также предлагается метод сплайн-коллокации для слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, который в дальнейшем используется для численного решения граничных уравнений.

2. Постановки краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в произвольной области в R^2

Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа, которое задано в открытой области $G \subset R^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, (x_1, x_2) \in G \quad (2.1)$$

Сама область G при этом ограничена замкнутой кривой Γ . Обозначим через $\bar{G} = G \cup \Gamma$. На границе Γ задано одно из двух краевых условий:

Условие Дирихле:

$$u(x)|_{x \in \Gamma} = f(x), \quad (2.2)$$

Условие Неймана:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} |_{x \in \Gamma} = g(x), \quad (2.3)$$

Для уравнения (2.1) будем рассматривать следующие краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле (D_1): найти функцию $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в G и граничному условию (2.2) на Γ .

Внешняя задача Дирихле (D_2): найти функцию $u \in C^2(R^2 \setminus \bar{G}) \cap C(R^2 \setminus G)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в $R^2 \setminus \bar{G}$ и граничному условию (2.2) на Γ .

Внутренняя задача Неймана (N_1): найти функцию $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в G и граничному условию (2.3) на Γ .

Внешняя задача Неймана (N_2): найти функцию $u \in C^2(R^2 \setminus \bar{G}) \cap C(R^2 \setminus G)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в $R^2 \setminus \bar{G}$ и граничному условию (2.3) на Γ .

Описанные граничные задачи можно свести к решению интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода по границе Γ , используя представление решения $u(x)$ в виде потенциалов простого и двойного слоёв. Вывод граничных уравнений можно найти в [1].

В случае задачи Дирихле представим решение уравнения в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) ds(y), x \in R^2, \quad (2.4)$$

где непрерывная функция ψ называется плотностью и находится из решения следующего интегрального уравнения (для внутренней задачи Дирихле)

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) ds(y) = -2f(x), x \in \Gamma \quad (2.5)$$

для внешней задачи Дирихле

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) ds(y) = 2f(x), x \in \Gamma. \quad (2.6)$$

Решение задачи Неймана может быть представлено в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in R^2. \quad (2.7)$$

Здесь непрерывная плотность φ для внутренней задачи Неймана является решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y) = 2g(x), x \in \Gamma. \quad (2.8)$$

для внешней задачи

$$\varphi(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y) = -2g(x), x \in \Gamma \quad (2.9)$$

Функция $\Phi(x, y)$ здесь называется фундаментальным решением уравнения Лалпласа; в двумерном случае она принимает вид [5]:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2.10)$$

3. Решение слабосингулярного интегрального уравнения Фредгольма

От граничных уравнений (2.5)-(2.6) и (2.8)-(2.9) можно перейти к одномерным уравнениям Фредгольма, используя параметрическое представление кривой Γ . Получаемые при этом уравнения будут слабосингулярными, т.е. их ядро $K(t, s)$ будет иметь слабую особенность при $t = s$. При этом конкретная форма ядра уравнения будет зависеть от решаемой краевой задачи и вида области G .

В данном разделе опишем метод сплайн-коллокации, который будем использовать для решения граничных и.у.. Для этого рассмотрим абстрактное слабосингулярное уравнение

$$\psi(t) - \lambda \int_a^b \frac{A(t,s)}{|t-s|^\alpha} \psi(s) ds = f(t), t \in [a,b], 0 < \alpha < 1. \quad (3.1)$$

Хорошо известно, что производные решений таких уравнений могут иметь степенные особенности на границах отрезка $[a,b]$ [7]. Этот факт можно учитывать при построении сеток в процессе дискретизации.

Построим равномерную сетку узлов $t^i = a + \frac{b-a}{n}i, i = \overline{0,n}$. Далее в каждом отрезке $[t^i, t^{i+1}], i = \overline{0, n-1}$ введём узлы $t_k^i, k = \overline{0, r-1}$. Узлы t_k^i представляют собой проекцию нулей ξ_k многочлена Лежандра степени r на отрезок $[t^i, t^{i+1}]$.

К исходному уравнению применим метод коллокаций по сетке t_k^i , получим

$$\psi(t_k^i) - \lambda \int_a^b \frac{A(t_k^i, s)}{|t_k^i - s|^\alpha} \psi(s) ds = f(t_k^i) \quad (3.2)$$

Решение будем искать в виде сплайна $S(t)$ по узлам t_k^i . Сплайн состоит из интерполяционных полиномов Лагранжа степени r . На j -ом отрезке $[t^j, t^{j+1}]$ решение будет аппроксимироваться полиномом вида:

$$P_r^j(t) = \sum_{p=0}^{r-1} \psi(t_p^j) \gamma_p^j(t),$$

где $\gamma_p^j(t)$ – фундаментальный полином, построенный по узлам $t_p^j, p = \overline{0, r-1}$.

$$\gamma_p^j(t) = \prod_{q=0, q \neq p}^{r-1} \frac{t - t_q^j}{t_p^j - t_q^j}$$

Перепишем соотношение (3.2) в виде

$$\psi(t_k^i) - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t^j}^{t^{j+1}} \frac{A(t_k^i, s)}{|t_k^i - s|^\alpha} \psi(s) ds = f(t_k^i),$$

теперь, подставив вместо $\psi(s)$ полиномы $P_r^j(s)$ и, меняя местами порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\psi(t_k^i) - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{r-1} \psi(t_p^j) \int_{t^j}^{t^{j+1}} \frac{A(t_k^i, s)}{|t_k^i - s|^\alpha} \gamma_p^j(s) ds = f(t_k^i).$$

Таким образом мы пришли к системе линейных алгебраических уравнений размера $n \times r$:

$$\psi_k^i - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{r-1} \psi_p^j I_p^j(t_k^i) = f_k^i,$$

$$f_k^i = f(t_k^i), \psi_k^i = \psi(t_p^i), I_p^j(t_k^i) = \int_{t^j}^{t^{j+1}} \frac{A(t_k^i, s)}{|t_k^i - s|^\alpha} \gamma_p^j(s) ds, \quad (3.3)$$

из которой определим значения ψ_k^i .

Интегралы $I_p^j(t_k^i)$ будут являться слабосингулярными, если точка t_k^i попадает на отрезок $[t^j, t^{j+1}]$, т.е. при $i = j$. В этом случае их следует вычислять по специальной квадратурной формуле для слабосингулярных интегралов; при $i \neq j$ к ним можно применить любую квадратурную формулу (например, формулу Гаусса).

3.1. Квадратурная формула для вычисления слабосингулярных интегралов

Для вычисления интегралов $I_p^j(t_k^i)$ при $i = j$ построим, следуя работе [6], специальную квадратурную формулу. Для упрощения записи опишем её на примере абстрактного слабосингулярного интеграла вида

$$\int_c^d \frac{h(t, s)}{|t - s|^\alpha} ds. \quad (3.4)$$

Зафиксируем конкретную точку $t = t^* \in [c, d]$, в которой нужно вычислить интеграл (3.4).

Введём на отрезке $[c, d]$ неравномерную сетку, которая сгущается к точке t^*

$$s_k^1 = t^* - (t^* - c) \left(\frac{k}{M_1} \right)^v, \quad k = \overline{0, M_1}; \quad s_k^2 = t^* + (d - t^*) \left(\frac{k}{M_2} \right)^v, \quad k = \overline{0, M_2}.$$

где параметр $v > 1$ определяет степень сгущения этой сетки.

На каждом отрезке $[s_{k-1}^1, s_k^1], k = \overline{1, M_1}$ и $[s_{k-1}^2, s_k^2], k = \overline{1, M_2}$ аппроксимируем интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса по r узлам

$$s_{jk}^1 = \frac{s_{k-1}^1 + s_k^1}{2} + \frac{s_{k-1}^1 - s_k^1}{2} \xi_j, \quad j = \overline{1, r}; \quad s_{jk}^2 = \frac{s_k^2 + s_{k-1}^2}{2} + \frac{s_k^2 - s_{k-1}^2}{2} \xi_j, \quad j = \overline{1, r}$$

где ξ_j – корни полинома Лежандра $L_r(t)$ степени r .

Таким образом получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{h(t^*, s)}{|t^* - s|^\alpha} ds = \sum_{k=1}^{M_1} \frac{s_{k-1}^1 - s_k^1}{2} \sum_{j=1}^r W_j \frac{h(t^*, s_{jk}^1)}{|t^* - s_{jk}^1|^\alpha} + \\ + \sum_{k=1}^{M_2} \frac{s_k^2 - s_{k-1}^2}{2} \sum_{j=1}^r W_j \frac{h(t^*, s_{jk}^2)}{|t^* - s_{jk}^2|^\alpha} + R_n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где W_j – весовые коэффициенты формулы Гаусса, R_n – остаточный член.

4. Численные результаты

4.1. Задачи Дирихле и Неймана в круге

Перейдём к описанию алгоритма сведения интегральных уравнений на границе Γ к одномерным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Рассмотрим его на примере простейших внутренних краевых задач D_1 и N_1 в круге радиуса R .

Граница области Γ представляет собой окружность радиуса R ; в параметрическом представлении:

$$\begin{cases} x_1 = R \cos(t) \\ x_2 = R \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad (4.1)$$

Внешняя нормаль n_y в точке $(y_1, y_2) \in \Gamma$ определится соотношением

$$n_y = \left\{ \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}; \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right\} \quad (4.2)$$

Найдём нормальные производные по внешним нормальям n_x и n_y .

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_x} = \nabla \Phi \cdot n_x = \frac{1}{2\pi |x - y|^2} \sum_{i=1}^2 (y_i - x_i) n_x^i = \frac{(y - x, n_x)}{2\pi |x - y|^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n_y} = \nabla \Phi \cdot n_y = \frac{1}{2\pi |x - y|^2} \sum_{i=1}^2 (x_i - y_i) n_y^i = \frac{(x - y, n_y)}{2\pi |x - y|^2} \quad (4.4)$$

Используя параметрическое уравнение поверхности (4.1), введём замену переменных

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\rightarrow (R \cos(t), R \sin(t)) \\ (y_1, y_2) &\rightarrow (R \cos(s), R \sin(s)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для внутренней задачи Дирихле подставим (4.4) и (4.2) в уравнение (2.5) и используя замену (4.5), а также учитывая, что

$$ds(y) = \sqrt{(y_1'(s))^2 + (y_2'(s))^2} ds = \sqrt{R^2 \sin^2(s) + R^2 \cos^2(s)} ds = R ds \quad (4.6)$$

получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \psi(R \cos(t), R \sin(t)) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t, s) \psi(R \cos(s), R \sin(s)) ds = \\ = -2f(R \cos(t), R \sin(t)), \\ K(t, s) = \frac{\cos(s)(\cos(t) - \cos(s)) + \sin(s)(\sin(t) - \sin(s))}{(\cos(t) - \cos(s))^2 + (\sin(t) - \sin(s))^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выражение $K(t, s)$ можно упростить:

$$K(t, s) = \frac{\cos(t - s) - 1}{2 - 2\cos(t - s)} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь уравнение (4.7) можно окончательно записать в виде

$$\psi(r \cos(t), r \sin(t)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(r \cos(s), r \sin(s)) ds = -2f(r \cos(t), r \sin(t)) \quad (4.8)$$

Для внутренней задачи Неймана (N_1) аналогично получим уравнение

$$\varphi(r \cos(t), r \sin(t)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos(s), r \sin(s)) ds = 2g(r \cos(t), r \sin(t)) \quad (4.9)$$

Уравнения (4.8) и (4.9) могут быть разрешены аналитически; решая уравнение (4.8) и подставляя найденную плотность $\psi(x)$ в выражение (2.4), можно получить аналитическое решение задачи D_1 в круге в виде интеграла Пуассона. Аналогично можно получить аналитические решения и для задач D_2 , N_1 и N_2 ; вывод соответствующих решений можно найти в книге [3].

Модельная задача. В качестве модельных рассмотрим задачи D_1 и N_1 круге единичного радиуса. В качестве точного решения выберем функцию

$$u(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin(x_2) \quad (4.10)$$

На графиках 1 и 2 приведена зависимость погрешности от числа полиномов n для задач D_1 и N_1 . Для решения уравнений (4.8) и (4.9)

выбирались параметры $r = 7, M_1 = M_2 = 5, \nu = 1.5$. Погрешность оценивается в смысле пространства C по сеточной норме

$$\|u(x_1, x_2) - u^*(x_1, x_2)\|_C = \max_{i,j} |u(\xi_{ij}, \eta_{ij}) - u^*(\xi_{ij}, \eta_{ij})|. \quad (4.11)$$

где u^* – приближённое решение, контрольные узлы $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D$ выбираются по правилу

$$\begin{cases} \xi_{ij} = r_i \cos(t_j) \\ \eta_{ij} = r_i \sin(t_j) \end{cases}; \quad r_i = \frac{i+1}{M+1}, i = \overline{0, M-1}; \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}, j = \overline{0, N-1}.$$

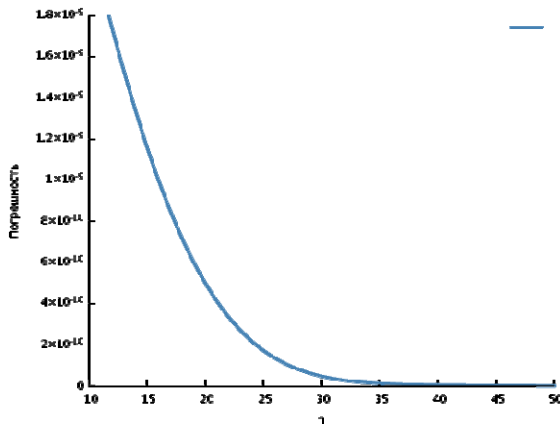


Рис. 1. Погрешность – задача D_1

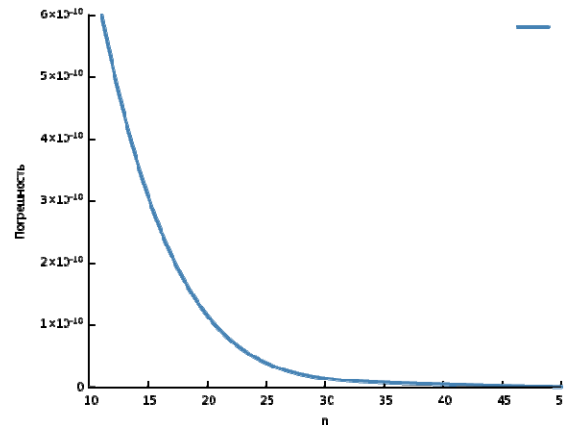


Рис. 2. Погрешность – задача N_1

4.2. Задачи Дирихле и Неймана для эллиптической области

В случае эллиптической области, ограниченной эллипсом с полуосями a, b

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(t) \\ x_2 = b \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad (4.12)$$

будем действовать аналогично: используя выражения для производных (4.3)–(4.4) и замену переменных

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\rightarrow (a \cos(t), b \sin(t)) \\ (y_1, y_2) &\rightarrow (a \cos(s), b \sin(s)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

сведём граничные уравнения (2.5) и (2.8) к уравнениям Фредгольма 2-го рода для задач D_1 и N_1 соответственно.

Для задачи D_1 получим

$$\begin{aligned} &\psi(a \cos(t), b \sin(t)) - \\ & - \frac{ab}{\pi} \int_0^{2\pi} K_d(t, s) \psi(a \cos(s), b \sin(s)) ds = -2f(a \cos(t), b \sin(t)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

где ядро $K_d(t, s)$ имеет вид:

$$K_d(t, s) = \frac{\cos(s)(\cos(t) - \cos(s)) + \sin(s)(\sin(t) - \sin(s))}{(a \cos(t) - a \cos(s))^2 + (b \sin(t) - b \sin(s))^2}.$$

Для задачи N_1 получим

$$\begin{aligned} & \varphi(a \cos(t), b \sin(t)) - \\ & - \frac{ab}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t, s) \varphi(a \cos(s), b \sin(s)) ds = 2g(a \cos(t), b \sin(t)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

с ядром

$$\begin{aligned} K_n(t, s) = & \frac{\sqrt{a^2 \sin^2(s) + b^2 \cos^2(s)}}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \times \\ & \times \frac{\cos(t)(\cos(t) - \cos(s)) + \sin(t)(\sin(t) - \sin(s))}{(a \cos(t) - a \cos(s))^2 + (b \sin(t) - b \sin(s))^2}. \end{aligned}$$

Значение решения u в точке (x_1, x_2) для задачи D_1 определим по формуле (2.4), которая после замены (4.13) примет вид:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \cos(s)(x_1 - a \cos(s)) + a \sin(s)(x_2 - b \sin(s))}{(x_1 - a \cos(s))^2 + (x_2 - b \sin(s))^2} \psi(y) ds. \quad (4.16)$$

Для задачи N_1 определим u в точке (x_1, x_2) по формуле (2.7), которая после замены (4.13) примет вид:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(a \cos(s) - x_1)^2 + (b \sin(s) - x_2)^2}} \times \\ & \times \sqrt{a^2 \sin^2(s) + b^2 \cos^2(s)} \varphi(y) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Модельная задача. В качестве модельных рассмотрим задачи D_1 и N_1 в эллипсе с полуосями $a = 1.0, b = 1.5$. В качестве точного решения выберем функцию (4.10).

Решение граничных уравнений (4.14) и (4.15) осуществляем с помощью алгоритма, описанного в разделе 3 с параметрами $r = 7, M_1 = M_2 = 5, v = 1.5$. Приближённое решение u^* определяем через интегралы (4.16) и (4.17) для задач D_1 и N_1 соответственно.

На графиках 3 и 4 приведена зависимость погрешности от числа полиномов n для задач D_1 и N_1 . Погрешность оценивается в смысле

пространства C по сеточной норме (4.11), где контрольные узлы $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D$ выбираются по правилу

$$\begin{cases} \xi_{ij} = r_i(a \cos(t_j)) \\ \eta_{ij} = r_i(b \sin(t_j)) \end{cases}; \quad r_i = \frac{i+1}{M+1}, i = \overline{0, M-1}; \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}, j = \overline{0, N-1}.$$

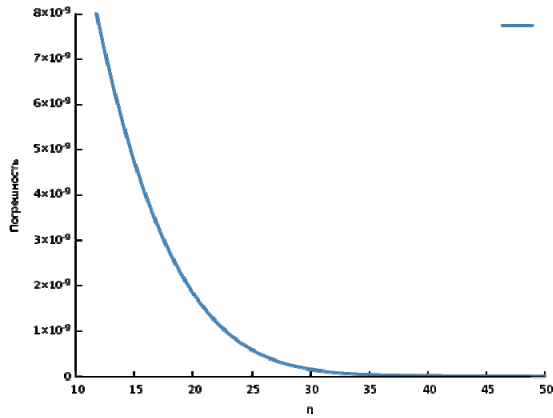


Рис. 3. Погрешность – задача D_1

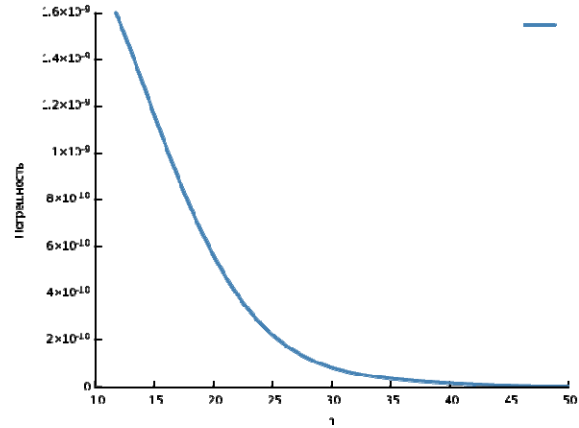


Рис. 4. Погрешность – задача N_1

4.3. Случай области сложной структуры

Обобщим результаты, полученные в двух предыдущих разделах: будем считать, что линия Γ , ограничивающая область решения D , задана в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = \alpha(t) \\ x_2 = \beta(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad (4.18)$$

В этом случае единичный вектор нормали $n(t)$ в точке $(\alpha(t), \beta(t)) \in \Gamma$ определится соотношением:

$$n(t) = \left\{ \frac{\beta'(t)}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}}, \frac{-\alpha'(t)}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}} \right\} \quad (4.19)$$

А элемент дуги $ds(y)$ определится следующим образом:

$$ds(y) = \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

Используя нормаль (4.19) и выражение для $ds(y)$, с помощью замены

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\rightarrow (\alpha(t), \beta(t)) \\ (y_1, y_2) &\rightarrow (\alpha(s), \beta(s)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

сведём граничные уравнения (2.8) и (2.8) к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода.

Для задачи D_1 результирующее уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(t), \beta(t)) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_d(t, s) \psi(\alpha(s), \beta(s)) ds &= -2f(\alpha(t), \beta(t)), \\ K_d(t, s) &= \frac{\beta'(s)(\alpha(t) - \alpha(s)) - \alpha'(s)(\beta(t) - \beta(s))}{(\alpha(t) - \alpha(s))^2 + (\beta(t) - \beta(s))^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Значение решения u в точке (x_1, x_2) при этом определится по формуле (2.4), которая при подстановке (4.20) и $ds(y)$ примет вид:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta'(s)(x_1 - \alpha(s)) - \alpha'(s)(x_2 - \beta(s))}{(x_1 - \alpha(s))^2 + (x_2 - \beta(s))^2} \psi(y) ds. \quad (4.22)$$

Для задачи N_1 получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(t), \beta(t)) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t, s) \psi(\alpha(s), \beta(s)) dt &= 2g(\alpha(t), \beta(t)), \\ K(t, s) &= \frac{\sqrt{(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2}}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}} \frac{(\alpha(t) - \alpha(s))\beta'(t) - (\beta(t) - \beta(s))\alpha'(t)}{(\alpha(t) - \alpha(s))^2 + (\beta(t) - \beta(s))^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Значение решения u в точке (x_1, x_2) найдём по формуле:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{(x_1 - \alpha(s))^2 + (x_2 - \beta(s))^2} \times \\ &\times \sqrt{(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2} \psi(y) ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Модельная задача.

Рассмотрим следующую модельную задачу: пусть граница области задана параметрически

$$\begin{cases} \alpha(t) &= (1 + 0.3 \cos(7t)) \cos(t) \\ \beta(t) &= (1 + 0.3 \cos(7t)) \sin(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

Область, ограничиваемая кривой (4.25), представлена на рис. 5. В качестве точного решения выберем

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2. \quad (4.26)$$

Для того, чтобы оценить погрешность решения в смысле нормы пространства C по формуле (4.11) построим систему контрольных точек (ξ_{ij}, η_{ij}) в области (4.25) следующим образом:

$$\begin{cases} \xi_{ij} = r_i \alpha(t_j) \\ \eta_{ij} = r_i \beta(t_j) \end{cases}; \quad r_i = \frac{i+1}{M+1}, i = \overline{0, M-1}; \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}, j = \overline{0, N-1}.$$

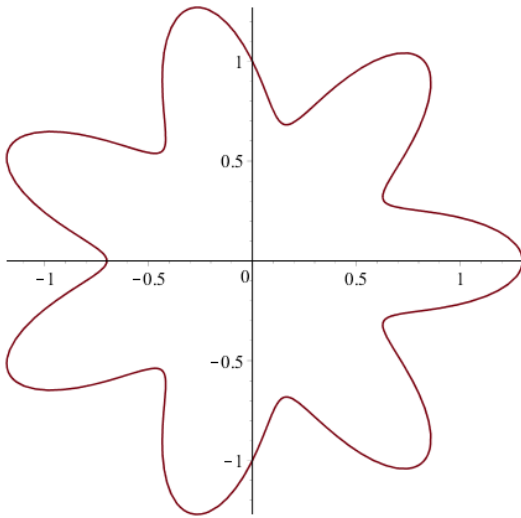


Рис. 5. Область задачи

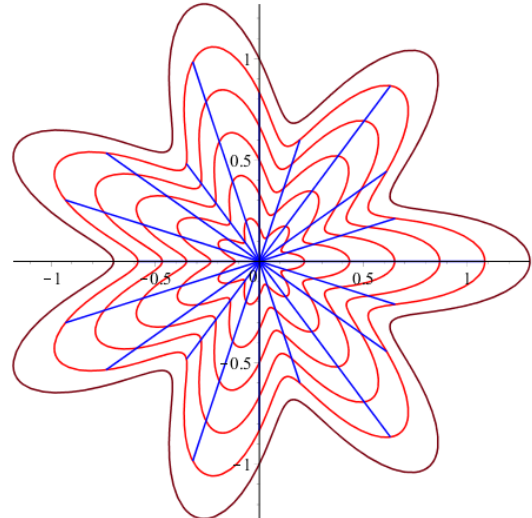


Рис. 6. Сетка контрольных узлов

Контрольные узлы выбираются на линиях $(r_i \alpha(t), r_i \beta(t))$, $t = \overline{0, 2\pi}$, которые отмечены на рисунке 6 красным цветом. Синим цветом отмечены линии, соответствующие значениям параметра $t = t_j$. Таким образом контрольные узлы находятся на пересечении синих и красных линий.

При решении граничных уравнений (4.21) и (4.23) выберем параметры $r = 7, M_1 = M_2 = 5, v = 1.5$. Приближённое решение u^* определяем через интегралы (4.22) и (4.24) для задач D_1 и N_1 соответственно.

На графиках ниже представлены зависимости погрешностей от числа полиномов n для задач Дирихле и Неймана.

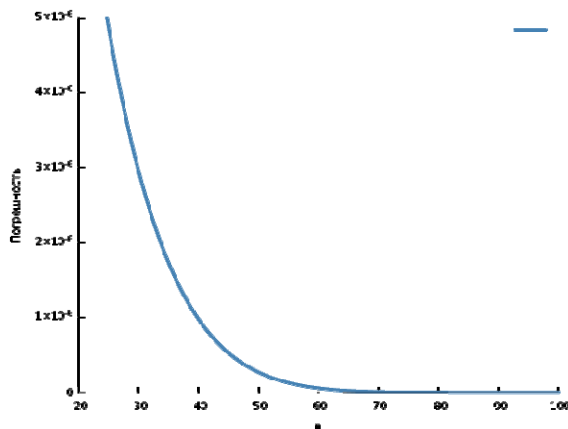


Рис. 7. Погрешность – задача D_1

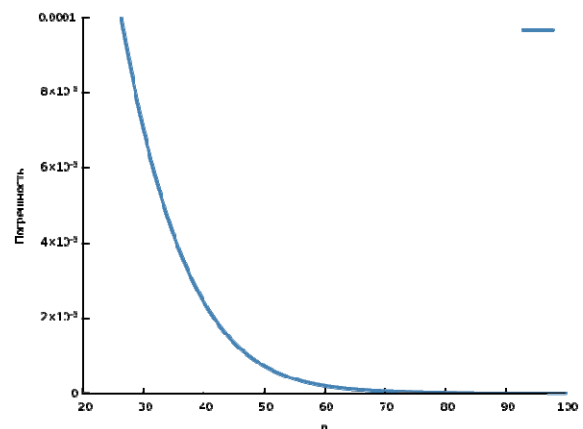


Рис. 8. Погрешность – задача N_1

Заключение

Как видно из графиков 1-2, 3-4 и 7-8 рассмотренный метод сходится в смысле метрики пространства C и позволяет достигать высокой точности даже в областях сложной формы. При этом открытым остаётся вопрос оптимального выбора параметров численного метода n, r, M_1, M_2, ν , который позволит получать наивысшую точность при наименьших вычислительных затратах.

Библиографический список

1. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 311 с.
2. Крутицкий, П. А. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. / П. А. Крутицкий // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 11. – С. 1653–1665.
3. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
4. Krutitskii, P. A. Hypersingular integral equations not needed in the impedance problem in scattering theory / P. A. Krutitskii // J. Computers and Mathematics with Applications. – 2003. – № 45. – 391–399.
5. Polyanin, A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / A. D. Polyanin. – Boca Raton–London : Chapman & Hall/CRC Press, 2002.
6. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды Средневолжского математического общества. – Т. 10, № 2. – 2008. – С. 68–78.
7. Tynda, A. N. Numerical algorithms of optimal complexity for weakly singular Volterra integral equations. / A. N. Tynda // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2006. – Vol.6. – No. 4. – Pp.436–442.

АППРОКСИМАЦИЯ ЯДРА В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Д. В. Тарасов, Н. В. Зверовщикова, И. Ю. Алексеев, Н. С. Степанов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: tarasovdv@mail.ru, alekseew.ilya-2010@yandex.ru,
ctnik1998@mail.ru

Введение

Постановки задач численного решения уравнений Вольтерра второго рода, в которых задание ядра, определяемого, возможно, из экспериментальных данных происходит в табличном виде, приводят к зада-

чам аппроксимации ядра [1, 2]. В качестве методов аппроксимации для этих целей во многом подходят сплайны, к преимуществам которых можно отнести высокую точность приближения. Наибольший интерес представляют сплайны с малым дефектом, т.е. с большей гладкостью.

В работе мы рассмотрим применение интерполяционных кубических сплайнов дефекта 1 к аппроксимации ядра интегрального уравнения, с последующим его решением методом коллокации.

Вычислительная схема

Определение. Кубическим сплайном дефекта 1, интерполирующим на отрезке $[a, b]$ исходную функцию $f(x)$, называется функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $g(x) \in C^2[a, b]$, т.е. непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;

2) на каждом из отрезков $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ она представляет собой кубический многочлен

$$g(x) = g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3;$$

3) в узлах сетки $g(x_k) = f(x_k)$;

4) граничные условия имеют вид $g''(a) = g''(b) = 0$.

При определении коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k , $k = 1, 2, \dots, n$ сплайна $g(x)$ мы приходим к необходимости решения системы связей (отражающей выполнение всех условий определения):

$$\begin{cases} a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = f_0, \\ a_k = f_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \\ a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \\ c_1 - 3d_1 h_1 = 0, \\ c_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где $f_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Исключение неизвестных a_k, b_k, d_k в выражении (1), и сведение его к решению системы относительно неизвестных c_k позволит получить СЛАУ с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$h_{k-1}c_{k-2} + 2(h_{k-1} + h_k)c_{k-1} + h_k c_k = 3 \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - 3 \frac{f_{k-1} - f_{k-2}}{h_{k-1}}, \quad (2)$$

где $k = 2, 3, \dots, n$, $c_0 = 0$, $c_n = 0$.

Применение метода прогонки к системе (2) сводится к вычислению прогоночных коэффициентов по формулам прямой прогонки

$$\delta_1 = -\frac{h_2}{2h_1 + 2h_2}, \lambda_1 = \frac{3}{2h_1 + 2h_2} \cdot \left(\frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1} \right)$$

$$\delta_{k-1} = -\frac{h_k}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}} \cdot \left(3 \cdot \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - 3 \cdot \frac{f_{k-1} - f_{k-2}}{h_{k-1}} - h_{k-1}\lambda_{k-2} \right),$$

при $k = 3, 4, \dots, n$, а далее к нахождению искоемых значений c_k обратной прогонкой по формуле

$$c_{k-1} = \delta_{k-1}c_k + \lambda_{k-1},$$

считая, что $k = n, n-1, \dots, 2$ и принимая во внимание $c_n = 0$ [3, с. 117–123].

После этого окончательно получаем остальные коэффициенты

$$a_k = f_k, d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}, b_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} + \frac{2}{3}h_k c_k - \frac{1}{3}h_k c_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n. (3)$$

Далее рассмотрим уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_0^x K(x-s)y(s)ds = f(x), x \in [0, B]. (4)$$

где $y(x)$ – искомая функция.

Уравнение (4) в целом можно трактовать как уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K(x, s)$, которое обращается в нуль при $s > x$ [4, с. 45]. Традиционная вычислительная схема метода коллокации для решения уравнения интегрального уравнения второго рода строится следующим образом [5, с. 543–550]. Пусть N – целое число. Разобьем отрезок $[0, B]$ на сеткой узлов (квадратур): $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = B$. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x), (5)$$

$$\text{где } \varphi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Delta_k \\ 0, & \text{при } x \notin \Delta_k \end{cases}, \Delta_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Затем определяют систему узлов коллокаций $\bar{x}_k = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1}) / 2, k = 1, 2, \dots, N$, каждый из которых лежит внутри

участков Δ_k , $k=1,2,\dots,N$, а коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k=1,2,\dots,N$, определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(\bar{x}_i) - \lambda \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{\Delta_k} K(\bar{x}_i - s) \varphi_k(s) ds = g(\bar{x}_i), \quad i=1,2,\dots,N. \quad (6)$$

Будем считать, что разностное ядро уравнения (4) представлено своими значениями $K_j = K(x_j)$, $j=0,1,\dots,n$, на отрезке $[0,B]$ и путем применения интерполяционных кубических сплайнов получим его аппроксимацию:

$$K^*(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \\ x \in \Delta_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j=1,2,\dots,n.$$

Тогда система (6) примет вид

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(\bar{x}_i) - \lambda \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{\Delta_k} K^*(\bar{x}_i - s) \varphi_k(s) ds = g(\bar{x}_i), \quad i=1,2,\dots,N. \quad (7)$$

Модельный пример

В качестве модельного примера было выбрано уравнение

$$y(x) - \frac{1}{10} \int_0^x K(x-s)y(s)ds = \frac{20-x}{20} \cos x - \frac{1+21x}{20} \sin x, \quad x \in [0, \pi), \quad (8)$$

ядро которого задано значениями

x_j	0	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$	$7\pi/10$	$8\pi/10$	$9\pi/10$	π
$K(x_j)$	1	1,37	1,87	2,57	3,51	4,81	6,59	9,01	12,35	16,90	23,14

Замечание. Представленные значения получены для функции $K(x) = e^x$, для которой точное решение примера $y(x) = \cos x - x \sin x$.

В ходе работы была построена программная реализация представленного алгоритма на языке C/C++ в среде разработки Visual Studio. Для рассматриваемого примера была выбрана равномерная сетка узлов с шагом $\pi/10$ и проведена интерполяция $K(x) = e^x$ кубическим сплайном. Промежуточные результаты работы программы по построению кубического сплайна дефекта 1 представлены для наглядности на рис. 1.

Затем методом коллокации, согласно формуле (7), при том же шаге узлов квадратур была получена аппроксимирующая СЛАУ, решение которой представлено на рис. 2.

Представленные результаты демонстрируют достаточно эффективный метод решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода даже при небольшой таблице задающей разностное ядро $K(x)$.

$$K(x) = \begin{cases} 1,369108 + 1,344949(x - 0,314159) + 0,811895(x - 0,314159)^2 + \\ + 0,861447(x - 0,314159)^3 \quad \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{10}; \\ 1,874456 + 1,880758(x - 0,628319) + 0,893638(x - 0,628319)^2 + \\ + 0,086732(x - 0,628319)^3 \quad \text{при } \frac{\pi}{10} \leq x < \frac{2\pi}{10}; \\ 2,566332 + 2,564671(x - 0,942478) + 1,283325(x - 0,942478)^2 + \\ + 0,413471(x - 0,942478)^3 \quad \text{при } \frac{2\pi}{10} \leq x < \frac{3\pi}{10}; \\ 3,513586 + 3,513091(x - 1,256637) + 1,735589(x - 1,256637)^2 + \\ + 0,479866(x - 1,256637)^3 \quad \text{при } \frac{3\pi}{10} \leq x < \frac{4\pi}{10}; \\ 4,810477 + 4,812971(x - 1,570796) + 2,402057(x - 1,570796)^2 + \\ + 0,707145(x - 1,570796)^3 \quad \text{при } \frac{4\pi}{10} \leq x < \frac{5\pi}{10}; \\ 6,586062 + 6,575014(x - 1,884956) + 3,206700(x - 1,884956)^2 + \\ + 0,853752(x - 1,884956)^3 \quad \text{при } \frac{5\pi}{10} \leq x < \frac{6\pi}{10}; \\ 9,017029 + 9,056580(x - 2,199115) + 4,692370(x - 2,199115)^2 + \\ + 1,576345(x - 2,199115)^3 \quad \text{при } \frac{6\pi}{10} \leq x < \frac{7\pi}{10}; \\ 12,345284 + 12,195186(x - 2,513274) + 5,298126(x - 2,513274)^2 + \\ + 0,642727(x - 2,513274)^3 \quad \text{при } \frac{7\pi}{10} \leq x < \frac{8\pi}{10}; \\ 16,902024 + 17,458836(x - 2,827433) + 11,456590(x - 2,82743)^2 + \\ + 6,534334(x - 2,827433)^3 \quad \text{при } \frac{8\pi}{10} \leq x < \frac{9\pi}{10}; \\ 23,140693 + 21,058030(x - 3,141593) + 0,000000(x - 3,141593)^2 - \\ - 12,155820(x - 3,141593)^3 \quad \text{при } \frac{9\pi}{10} \leq x < \pi. \end{cases}$$

Рис. 1. Кубический сплайн дефекта 1 для модельного примера (8)

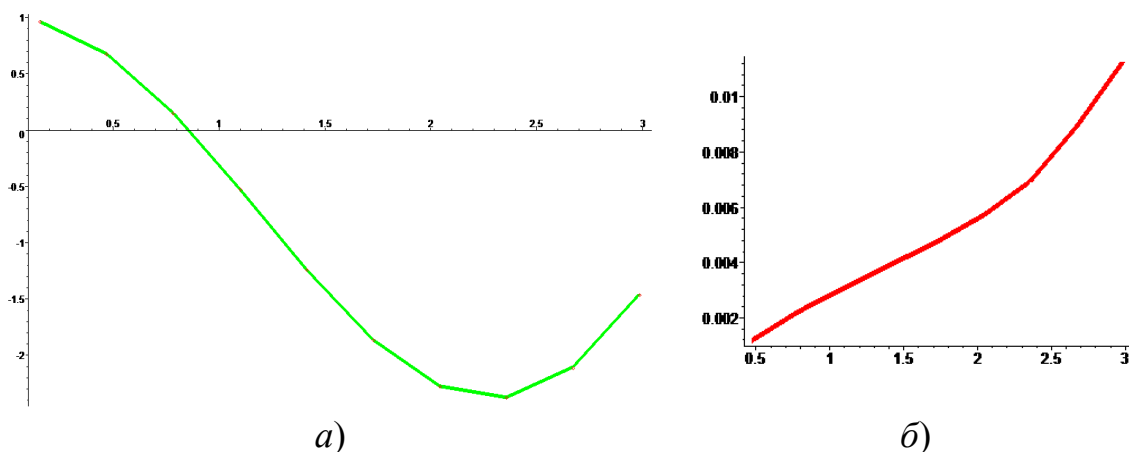


Рис. 2. Результаты решения уравнения (8): *а* – график приближенного решений; *б* – график абсолютной погрешности точного и приближенного решений в узлах квадратур

Библиографический список

1. Мейнарович, Е. В. О применении интерполяционных сплайнов к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра / Е. В. Мейнарович, Р. В. Поляков, Л. Н. Шлепаков // Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики. – Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1974. – С. 204–212.
2. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А. В. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2001. – 382 с.
4. Манжиров, А. В. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 3-е изд. – М. : Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 752 с.

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИАПАЗОНОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМОВ

Д. Е. Яблоков

Самарский национальный исследовательский университет,
г. Самара, Россия
E-mail: dyablokov@gmail.com

Для многих вычислительных задач одной из наиболее существенных сложностей при реализации алгоритмов является проблема пра-

вильного выбора способа представления поступающих на вход данных. Структура данных при взаимодействии с алгоритмами не должна быть пассивным объектом, т.к. для одних и тех же операций различные структуры данных обладают разным уровнем быстродействия. Вычислительная сложность, как мера эффективности алгоритмов, должна находиться в тесной взаимосвязи с семантическими и синтаксическими особенностями, представляющих данные абстракций. Это дает возможность через соответствие требованиям, предъявляемым к типам аргументов алгоритмов, добиваться наилучшего быстродействия за счет создания более развитой семантики обработки данных.

Одной из наиболее распространенных операций, которые приходится совершать над какими-либо наборами данных, представленными в виде линейных диапазонов, является итерирование. В общем смысле понятие диапазон служит своего рода абстракцией для того, что обладает признаками начала и окончания и где можно двигаться в определенном направлении, многократно выполняя операцию перехода на следующую позицию. Существует несколько нотаций диапазонов, отличающихся по способу задания ограничивающих условий и семантике средств обхода. Первая из них – это нотация, представляющая нестрогий или слабый диапазон, для которого способом определения его верхней границы служит некоторый признак, например, флаг или значение (рис. 1).

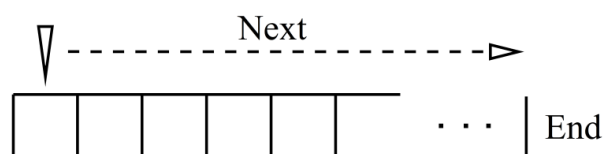


Рис. 1. Нотация нестрогого диапазона

Способом обхода нестрогого диапазона может служить следующая форма кода (Рис. 2), когда количество итераций заранее не определено, а завершение процесса обработки, т.е. выход из тела цикла возможен, только если признак окончания перейдет в сигнальное состояние или примет какое-то контрольное значение.

```
for(; !End; Next())
{
    /*
    Some code ...
    */
}
```

Рис. 2. Пример кода для обхода нестрогого диапазона.

Второй вид диапазона – это счетный диапазон (Рис. 3). Он является развитием понятия нестрогого диапазона с возможностью указания размера. В отличие от предыдущего способа, счетный диапазон гаранти-

рует, что в пределах обрабатываемого интервала не будет циклических элементов и не возникнет замкнутых путей перебора.

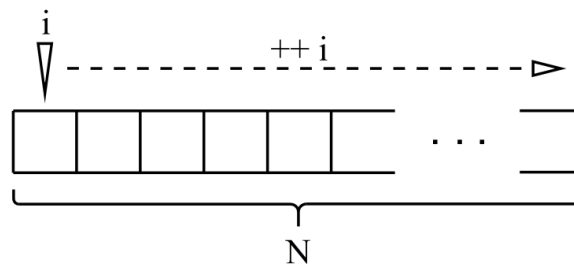


Рис. 3. Нотация счетного диапазона

Код для обхода счетного диапазона (рис. 4), как и в предыдущем примере, может быть записан в виде циклического оператора, но критерием для завершения процесса итерирования служит оценка состояния индекса текущей позиции, который в пределах обрабатываемого интервала не должен быть равным или превышать установленный размер диапазона.

```
for(/*Index initialization*/; i < N; ++i)
{
    /*
    Some code ...
    */
}
```

Рис. 4. Пример кода для обхода счетного диапазона

Третья нотация – это нотация ограниченного диапазона (рис. 5), идеологически построенная на принципах представления первых двух видов диапазонов. Как и в нотации для нестрогого диапазона количество итераций при работе с ограниченным диапазоном заранее не определено, но, как и в случае счетного диапазона возможно получение информации о размере с помощью организации частичного вычитания.

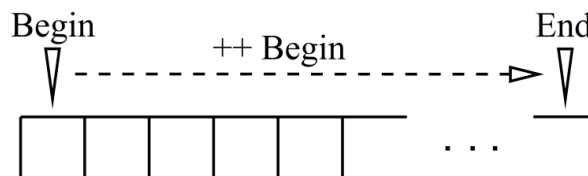


Рис. 5. Нотация ограниченного диапазона.

Для этого необходимо, чтобы объекты, выступающие в роли границ данного диапазона, соответствовали некоторому типу, обеспечивающему возможность произвольного доступа к любой из валидных позиций. Форма кода для организации процесса итерирования по ограниченному диапазону может быть такой, что признаком, индицирующим

необходимость выхода из тела цикла, будет факт обнаружения равенства ограничивающих объектов (рис. 6).

```
for(/*Begin, initialization*/; Begin != End; ++Begin)
{
    /*
    Some code ...
    */
}
```

Рис. 6 Пример кода для обхода ограниченного диапазона

Существует четыре разновидности способов обхода линейных диапазонов, а именно: однопроходный прямой, многопроходный прямой, двунаправленный (прямой и обратный) и с произвольным доступом. Для некоторых алгоритмов, связанных, например, с копированием или линейным поиском, достаточным требованием при обходе диапазона является поддержка однопроходной семантики (рис. 7). Операция перемещения на следующую позицию может осуществляться однократно, а обращение к возможным копиям, указывающим на предыдущие позиции недопустимо.

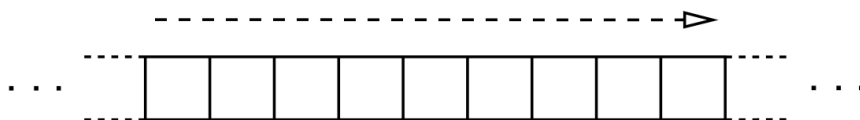


Рис. 7. Нотация однопроходного прямого обхода диапазона

Алгоритмы, производящие сравнение двух диапазонов или осуществляющие поиск вхождения поддиапазона, требуют от своих аргументов поддержки многопроходности (рис. 8), позволяющей неоднократное обращение к копиям, хранящим предыдущее состояние.

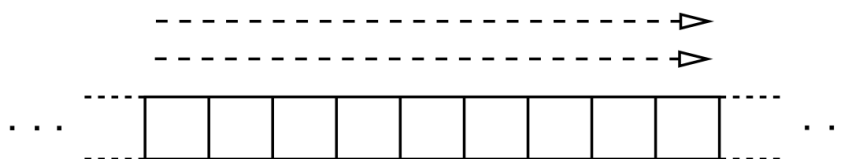


Рис. 8 Нотация многопроходного прямого обхода диапазона.

Для алгоритмов, предназначенных для реверсивного копирования или поиска последнего вхождения поддиапазона, необходимым требованием к аргументам, представляющим диапазон, является наличие двунаправленности, т.е. способности перемещения в заданных пределах, как в прямом, так и в обратном направлении (рис. 9).

Серия алгоритмов, предназначенных для различных видов сортировок или случайного переупорядочения, требует, чтобы абстракции, представляющие входные данные, имели возможность произвольного доступа к любой из позиций обрабатываемого диапазона (Рис. 10).

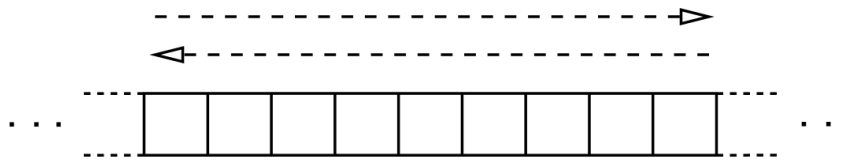


Рис. 9. Нотация двунаправленного обхода диапазона

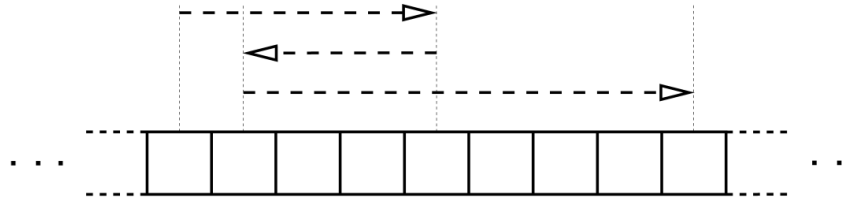


Рис. 10. Нотация обхода с произвольным доступом

Однопроходный и многопроходный прямые способы обхода могут быть применены для обработки данных из входного потока или односвязного списка соответственно и поддерживаются нестрогим или счетным диапазоном. Двунаправленный обход и обход с произвольным доступом могут применяться при работе с данными, хранящимися, например, в двухсвязном списке, или массиве и поддерживаются только при использовании нотаций счетного и ограниченного диапазонов.

Обобщённые концепции итераторов в чисто объектно-ориентированном языке нужны при проектировании компонентов обработки и анализа данных, так как абстракции, построенные на базе этих понятий, могут являться интерфейсами между обобщёнными алгоритмами и структурами хранения данных. Они также являются обобщением указателей, т.е. объектов, которые указывают на другие объекты и могут использоваться как основа для создания компонентов, осуществляющих различные варианты прохода по диапазону. Существует несколько различных способов обобщения семантики указателей, при этом каждый из способов является отдельной обобщённой концепцией.

Обобщенная концепция однопроходного прямого итератора (рис. 11) должна поддерживать операции создания собственной копии и продвижения в прямом направлении с единичным шагом.

```
public interface ITraversalIterator : ICloneable
{
    void Advance();
};
```

Рис. 11. Пример кода обобщенной концепции однопроходного прямого итератора

Обобщенная концепция многопроходного прямого итератора (рис. 12), как развитие концепции однопроходного итератора, в дополнение должна поддерживать операции отношения по критерию эквива-

лентности и определения идентичности по критерию подобия, чтобы исключить возможность сравнения несовместимых итераторов.

```
public interface IForwardIterator : ITraversalIterator,
    IEquatable<IForwardIterator>
{
    bool CompatibleWith(IForwardIterator iterator);
}
```

Рис. 12. Пример кода обобщенной концепции многопроходного прямого итератора

Обобщенная концепция двунаправленного итератора (рис. 13) обладает всеми качествами многопроходного прямого итератора с дополнительной возможностью единичного сдвига в обратном направлении.

```
public interface IBidirectionalIterator : IForwardIterator
{
    void Retreat();
};
```

Рис. 13. Пример кода обобщенной концепции двунаправленного итератора

Итератор произвольного доступа – это развивающая концепция для двунаправленного итератора, т.к. наряду со свойствами и функциональностью развиваемой концепции она предоставляет возможность произвольного смещения в обоих направлениях, а также получения расстояния в терминах типа данных, представляющего число элементов между итераторами, указывающими на разные позиции одного диапазона (рис. 14).

```
public interface IRandomAccessIterator<D> : IBidirectionalIterator,
    IComparable<IRandomAccessIterator<D>>
{
    void Advance(D offset);
    void Retreat(D offset);
    D Distance(IRandomAccessIterator<D> iterator);
};
```

Рис. 14. Пример кода обобщенной концепции итератора произвольного доступа

Обобщенные концепции итераторов предоставляют возможность для естественного способа классификации, при котором алгоритмы можно разбить по категориям в зависимости от того какие итераторы они используют. Это позволяет создавать реализации алгоритмов с разной асимптотикой в зависимости от вида абстракций, представляющих поступающие на вход данные.

Библиографический список

1. Страуструп, Б. Программирование. Принципы и практика с использованием C++. Второе издание / Б. Страуструп: Пер. с англ. – М. : Издательство Вильямс. – 2016. – 1328 с.

2. Шилдт, Г. C# 4.0 Полное руководство. Отдельное издание / Г. Шилдт: Пер. с англ. – М. : Вильямс – 2015. – 1056 с.

3. Яблоков, Д. Е. Применение обобщенных концепций итераторов и функциональных адаптеров для создания алгоритмов с развитой семантикой обработки данных / Д. Е. Яблоков / МНТК «Перспективные информационные технологии» : сб. науч. тр. / под ред. С. А. Прохорова. – Самара: СГАУ – 2017. – С. 1041–1044.

4. Яблоков, Д. Е. Специализация поведения интервальных алгоритмов с помощью моделей обобщенных концепций итераторов / Д. Е. Яблоков / МНТК «Перспективные информационные технологии» : сб. науч. тр. / под ред. С. А. Прохорова. – Самара : СГАУ. – 2018. – С. 245–249.

ОБ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

А. Р. Янбаева

Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия

E-mail: alina.yar94@mail.ru

На практике в большинстве случаев математическое моделирование физических, экономических, биологических и других процессов и явлений сводится к решению больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Так, например, если исходная математическая задача сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений, то для ее численного решения необходимо заменить ее СЛАУ. В этом случае говорят, что проведена дискретизация исходной дифференциальной задачи. От умения эффективно решать СЛАУ зависит возможность правильно моделировать различные физические процессы на ЭВМ. Если исходная задача двумерна или трехмерна, то возникающие СЛАУ имеют огромный порядок $M \approx 10^4, \dots, 10^9$. Системы такого порядка практически невозможно решать прямыми численными методами: они требуют $\sim M^3$ арифметических операций. Однако матрицы типичных СЛАУ являются очень сильно разреженными, причем алгоритмы определения местоположения ненулевых матричных элементов просты. Поэтому для таких СЛАУ получили широкое распространение итерационные методы численного решения, основанные на умножении матрицы системы на вектор: для таких матриц эта процедура дешева. Для самосопряженных положительных матриц $A = A^* > 0$ особенно привлекательным является

метод сопряженных градиентов и близкие к нему методы (см., например, [1–3]).

Рассмотрим первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности в единичном квадрате $\Omega = (x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1$:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x, y)\frac{dU}{dx}\right) - \frac{d}{dy}\left(k(x, y)\frac{dU}{dy}\right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

где функции $k(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые внутри и на границе области исследования, $k(x, y) \geq \nu > 0$, $\varphi(x, y)$ – непрерывная функция, определенная на границе $\Gamma = \partial\Omega$.

В дальнейшем, для простоты, будем считать, что $k(x, y)$ постоянные величины: $k(x, y) = G = \text{const}$.

Для аппроксимации задачи (1)–(2) заменим область Ω сеточной областью:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 * \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1 = \left\{ x_i = i * h_x, i = \overline{0, N_x + 1}, h_x = \frac{1}{N_x + 1} \right\},$$

$$\bar{\omega}_2 = \left\{ y_i = i * h_y, i = \overline{0, N_y + 1}, h_y = \frac{1}{N_y + 1} \right\},$$

где N_x, N_y – число сеточных линий в направлении осей координат OX и OY , соответственно, h_x и h_y – шаги сетки. Точка с координатами (x_i, y_i) будет называться (i, j) – узлом сетки, $u_{i,j} \equiv u(x_i, y_i)$. Поставим в соответствие задаче (1)–(2) следующую разностную схему:

$$u_{i,j} \left(\frac{2G}{h_x^2} + \frac{2G}{h_y^2} \right) = u_{i+1,j} \left(\frac{G}{h_x^2} \right) +$$

$$+ u_{i-1,j} \left(\frac{G}{h_x^2} \right) + u_{i,j+1} \left(\frac{G}{h_y^2} \right) + u_{i,j-1} \left(\frac{G}{h_y^2} \right) + f_{i,j}, \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{G}{h_x^2}; a_2 = \frac{G}{h_x^2}; a_3 = \frac{G}{h_y^2}; a_4 = \frac{G}{h_y^2}; \quad a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{2G}{h_x^2} + \frac{2G}{h_y^2};$$

В результате получается дискретный аналог дифференциального уравнения – система линейных алгебраических уравнений:

$$au_{i,j} = a_1 u_{i+1,j} + a_2 u_{i-1,j} + a_3 u_{i,j+1} + a_4 u_{i,j-1} + f_{i,j}, \quad (4)$$

где $i = \overline{1, N_x}$, $j = \overline{1, N_y}$, а общее количество неизвестных совпадает с общим числом уравнений в системе (4) и равно $N_x \times N_y$. Значения функции $u_{i,j}$ на границе Γ области исследования определяется точно из граничных условий первого рода.

Исходное дифференциальное уравнение (1) аппроксимируется построенной разностной схемой со вторым порядком относительно шага h . Действительно, например, в одномерном случае:

$$-\frac{d}{dx} \left(G \frac{dU}{dx} \right) - O(h^2) = f; O(h^2) \approx G \frac{h^2}{12!} \frac{\partial^4 u(x_i)}{\partial x^4}.$$

Граничные условия аппроксимируются точно, тогда можно сказать, что разностная схема (4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (1)–(2) со вторым порядком точности.

Целью настоящей работы является применение для задач (1)–(2), а точнее, для решения СЛАУ (4), методов типа сопряженных направлений – метода сопряженных градиентов, ускоренного метода сопряженных градиентов (см. [1, 2]), и сравнительный анализ их эффективности с другими итерационными методами, в частности, методом скорейшего спуска. Опишем кратко данные методы.

Метод скорейшего спуска. Для приближенного решения линейного операторного уравнения

$$Au = f \quad (5)$$

с невырожденным оператором A , заданным в вещественном гильбертовом пространстве H , рассмотрим неявную двухслойную итерационную схему

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

с произвольным начальным приближением $y_0 \in H$ и невырожденным оператором B .

В двухслойных итерационных методах вариационного типа для вычисления параметров τ_k не требуется никакой априорной информации об операторах схемы (6) (кроме условий общего вида $A = A^* > 0$, $(DB^{-1}A)^* = DB^{-1}A$ и т.д.). Если задано приближение y_k , а y_{k+1} находится по схеме (6), то итерационный параметр τ_{k+1} выбирается из условия минимума в H_D нормы погрешности $z_{k+1} = y_{k+1} - u$, где u – решение уравнения (5).

Значение итерационного параметра τ_{k+1} вычисляется по формуле:

$$\tau_{k+1} = \frac{(DB^{-1}Az_k, z_k)}{(DB^{-1}Az_k, B^{-1}z_k)}, k = 0, 1, \dots$$

Учитывая, что $Az_k = Ay_k - Au = Ay_k - f = r_k$ — невязка, а $B^{-1}r_k = \omega_k$ — поправка, формулу для параметра τ_{k+1} можно записать в следующем виде:

$$\tau_{k+1} = \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_k, \omega_k)}, k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

а итерационную схему (5) — в виде явной формулы для вычисления y_{k+1} :

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}\omega_k, k = 0, 1, \dots$$

Метод скорейшего спуска — частный случай двухслойного градиентного метода. Он характеризуется следующим выбором оператора $D: D = A$. Оператор A самосопряжен и положительно определен в H . Оператор B должен быть положительно определен в H . Учитывая соотношения $Az_k = Ay_k - f = r_k$ и $A = A^*$, из (7) получим формулу для итерационного параметра τ_{k+1} в неявном виде

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, \omega_k)}{(A\omega_k, \omega_k)}, k = 0, 1, \dots$$

Метод сопряженных градиентов. Для приближенного решения линейного операторного уравнения (5), рассмотрим трехслойные итерационные методы сопряженных направлений. Итерационные приближения вычисляются по трехслойной схеме

$$By_{k+1} = \alpha_{k+1}(B - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})By_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f, k = 1, 2, \dots,$$

$$By_1 = (B - \tau_1A)y_0 + \tau_1f, y_0 \in H,$$

а итерационные параметры τ_{k+1} и α_{k+1} находятся по формулам:

$$\tau_{k+1} = \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_k, \omega_k)}, k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

$$\alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_{k-1}, z_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, k = 1, 2, \dots, \alpha_1 = 1. \quad (9)$$

Метод сопряженных градиентов характеризуется следующим выбором оператора $D: D = A$. Оператор A самосопряжен и положительно определен в H . Оператор B должен быть положительно определен в H . Учитывая соотношения $Az_k = Ay_k - f = r_k$ и $A = A^*$, из (8)-(9) полу-

чим формулы для итерационных параметров τ_{k+1} и α_{k+1} в неявном виде:

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, \omega_k)}{(A\omega_k, \omega_k)}, k = 0, 1, \dots,$$

$$\alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(r_k, \omega_k)}{(r_{k-1}, \omega_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, k = 1, 2, \dots, \alpha_1 = 1.$$

Ускоренный метод сопряженных градиентов. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Уравнение (5) имеет единственное решение $u^* \in H$ при любом $f \in H$. Будем строить приближения к этому решению по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k r_k + \beta_k \delta_k + \omega_k, \quad (10)$$

в которой

$$r_k = f - Au_k, \quad \delta_k = u_k - u_{k-1}, \quad \omega_k = \sum_{i=1}^n a_i^k \varphi_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

где $\{\varphi_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, — система линейно независимых элементов.

В качестве начального приближения можно взять произвольный элемент $u_0 \in H$, а первое приближение строится при помощи вариационно-градиентного метода [3], согласно которому

$$u_1 = u_0 + \alpha_0 r_0 + \omega_0,$$

Будем искать поправку в виде

$$\omega_k = x_k + \alpha_k y_k + \beta_k z_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \omega_0 = x_0 + \alpha_0 y_0,$$

где

$$z_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{и} \quad x_k = \sum_{i=1}^n b_i^k \varphi_i, \quad y_k = \sum_{i=1}^n c_i^k \varphi_i.$$

Определим неизвестные параметры b_i^k и c_i^k из системы линейных алгебраических уравнений

$$(Ax_k, \varphi_j) = (r_k, \varphi_j), \quad (Ay_k, \varphi_j) + (Ar_k, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Параметры α_k и β_k вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_0 (Ar_0, r_0 + y_0) = (r_0, r_0 + y_0),$$

$$\alpha_k (Ar_k, r_k + y_k) + \beta_k (Ar_k, \delta_k + z_k) = (r_k, r_k + y_k),$$

$$\alpha_k(Ar_k, \delta_k + z_k) + \beta_k(r_{k-1} - r_k, \delta_k + z_k) = (\delta_k, r_k) + (r_k - r_{k-1}, x_k).$$

Численный пример

Проиллюстрируем работу рассмотренных методов на модельном примере. Рассмотрим задачу:

$$-\frac{d}{dx}\left(G\frac{dU}{dx}\right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$U|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

в единичном квадрате, в качестве неизвестной функции использована $U(x) = x^2$, в качестве коэффициентов в уравнении выбрана константа $G=1$. Подставляя решение и коэффициенты в (11) можно получить правую часть $f(x) = -2$.

Результаты численных экспериментов представлены в табл. 1 и рис. 1. Расчеты выполнялись до достижения точности 10^{-5} по погрешности и невязке $r_k = Ay_k - f$.

Таблица 1

Сравнительная характеристика методов для $N_x \times N_y = 11 \times 11$

	Абсолютная погрешность	Невязка $r_k = Ay_k - f$	Количество итераций	Время, мс
<i>MCC</i>	1,874536	0,000010	267	2
<i>MCG</i>	1,874536	0,000009	241	2

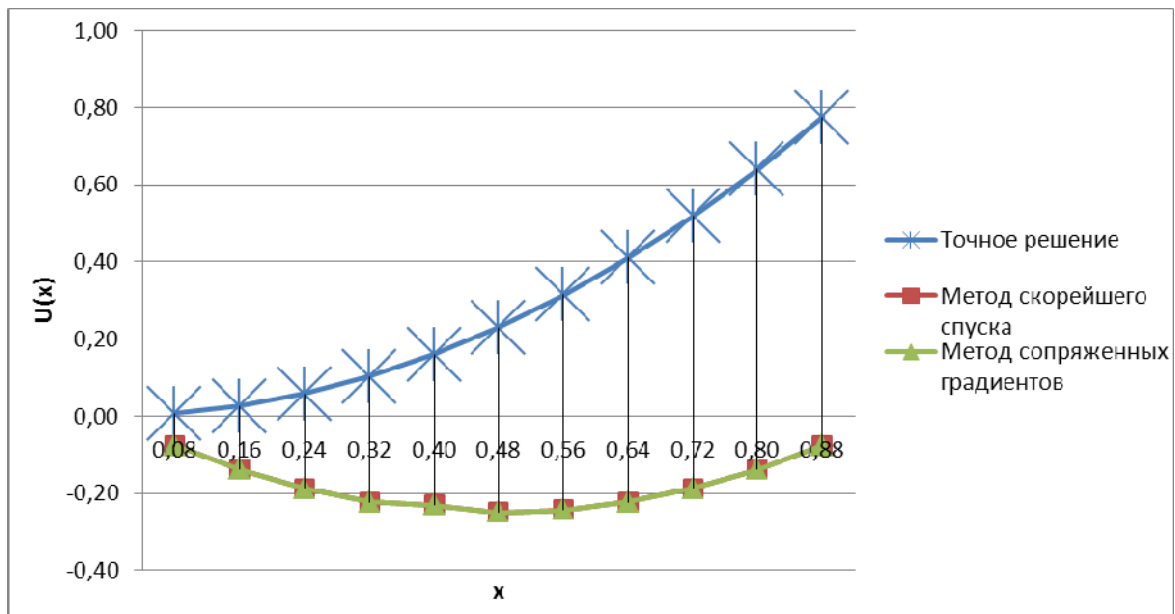


Рис. 1.. Сравнения решений метода скорейшего спуска, метода сопряженных градиентов с точным решением с размерностью матрицы 11×11

Численные эксперименты и их анализ свидетельствуют о преимуществах методов типа сопряженных направлений. В частности, метод сопряженных градиентов показывает лучшую скорость сходимости и позволяет получить приближенное решение, удовлетворяющее модельной задаче с заданной точностью, за меньшее число итераций.

В дальнейшем планируется провести численные эксперименты ускоренным методом сопряженных градиентов, в том числе и для двумерного эллиптического уравнения.

Автор выражает благодарность А.Р. Манаповой за помощь в процессе написания статьи.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978.
2. Лучка, А. Ю. Ускоренный метод сопряженных градиентов / А. Ю. Лучка, О. Э. Нощенко, И. В. Сергиенко, Н. И. Тукалевская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27, № 5. – С. 651–660.
3. Лучка, А. Ю. Вариационно-градиентный метод / А. Ю. Лучка, О. Э. Нощенко, Н. И. Тукалевская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – Т. 24, № 7. – С. 963–971.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ИМЕЮЩИХ ПОЧТИ ГАУССОВСКУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ НА ОТРЕЗКЕ $[-1;1]$

С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ВИДА $\rho(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$

А. О. Цуцаев, Ш. С. Хубежты

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Республика Северная-Осетия Алания, Россия
Южный математический институт-филиал ВНИИ РАН,
г. Владикавказ, Республика Северная-Осетия Алания, Россия
E-mail: tsutsaev@yandex.ru

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В существующей ныне литературе, относящейся к вопросу теории квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Коши, значительный интерес представляют квадратурные формулы Гаусса для таких интегралов (см. [3, 5, 8]). В соответствующих работах этого направления показывается, что достижение гауссовской степени точности в случае сингулярных интегралов вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1), \quad (1)$$

где $\rho(t)$ – заданная на $[-1, +1]$ конкретная суммируемая (обычно знакопостоянная) функция, а $\phi(t)$ – произвольная функция из некоторого класса гладких функций, возможно при определенном выборе значений параметра сингулярности x . А именно, в общем случае предполагается, что значениями x являются нули т.н. присоединенных функций Лежандра второго рода (см. [6, 8]). К обычно часто встречающимся в приложениях сингулярным интегралам вида (1) относятся интегралы с весовыми функциями $\rho(t) = (1-t)^p(1+t)^q$ ($p, q > -1$) (см. [1, 2, 3, 5, 6]). Как подтверждается упомянутыми и рядом других работ, сингулярные интегралы с такими весовыми функциями имеют применение в контактных задачах теории упругости, в том числе в теории трещин.

К наиболее приемлемому подходу к вычислению (приближенно) интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-t)^p(1+t)^q \frac{\phi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (2)$$

при произвольных значениях x из рассматриваемого интервала следует отнести применение к (2) квадратурных формул для сингулярных интегралов, основанных на аппроксимации функции $\phi(t)$ ее интерполяционными полиномами, построенных по корням ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ по весу $\rho(t) = (1-t)^p(1+t)^q$ полиномов. К основным вопросам в направлении исследования и приложения построенных на такой основе квадратурных формул относятся такие вопросы, как вопрос оценки их погрешности на различных классах функций $\phi(t)$, вопросы сходимости на возможно широких классах плотностей $\phi(t)$, влияние ряда локальных свойств последних на поведение их остаточных членов, а также вопросы влияния вычислительных погрешностей (округления, наследственных) и т.п.

В настоящей заметке мы будем рассматривать случаи $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$, т.е. интеграл вида

$$S(\phi; x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{\phi(t)}{t-x} dt. \quad (3)$$

Согласно сказанному выше, построение интересующей нас в данном случае квадратурной формулы для интеграла (3) основывается на

аппроксимации функции $\phi(t)$ интерполяционным многочленом, построенным по значениям $\phi(t)$ в узлах, представляющих нули многочлена $S_n(t)S_{n+1}(t)$, где $S_n(t)$ и $S_{n+1}(t)$ – многочлены Чебышева, степени $n, n+1$ соответственно.

2. Построение квадратурной формулы по узлам нулей полинома $S_n(t)S_{n+1}(t)$

С целью построения оговоренного выше интерполяционного полинома обозначим через $\{x_{kn}\}_{k=1}^n$ и $\{x_{kn+1}\}_{k=1}^{n+1}$ нули полиномов $S_n(t)$, $S_{n+1}(t)$ соответственно. В первую очередь нам нужно найти детальное выражение значений

$$[S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}}, [S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn+1}}.$$

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} [S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}} &= S'_n(x_{kn})S_{n+1}(x_{kn}), \\ [S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn+1}} &= S_n(x_{kn+1})S'_{n+1}(x_{kn+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя, далее, представления

$$C_n(t) = \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\arccos t)}{\cos \frac{1}{2}\arccos t}, \quad S_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\arccos t)}{\sin \frac{1}{2}\arccos t}$$

и корни многочленов $S_n(t)$, $S_{n+1}(t)$ $x_{kn} = \cos \frac{2k}{2n+1}\pi$ и $x_{kn+1} = \cos \frac{2k}{2n+3}\pi$ можно на основе (4) убедиться в справедливости равенств

$$[S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}} = -\frac{2n+1}{1-x_{kn}}, \quad [S_n(t)S_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn+1}} = \frac{2n+3}{1-x_{kn+1}}.$$

Применяя указанные соотношения, мы для искомого интерполяционного многочлена $L_{2n}(\phi; t)$ получим представление

$$\begin{aligned} L_{2n}(\phi; t) &= S_n(t)S_{n+1}(t) \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1-x_{kn}}{t-x_{kn}} \phi(x_{kn}) + \frac{1}{2n+3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-x_{kn+1}}{t-x_{kn+1}} \phi(x_{kn+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) вместо $\phi(t)$, получаем приближенную формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \frac{\phi(t)}{t-x} dt \approx -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_{kn}) \phi(x_{kn}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{S_n(t)S_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn})} dt +$$

$$+ \frac{1}{2n+3} \sum_{k=1}^{n+1} (1-x_{kn+1}) \phi(x_{kn+1}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{S_n(t)S_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn+1})} dt.$$

Следовательно, построение указанной квадратурной формулы сводится к вычислению интегралов вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{S_n(t)S_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn})} dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{S_n(t)S_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn+1})} dt. \quad (6)$$

Проделав некоторые вычисления, получим итоговую формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \frac{\phi(t)}{t-x} dt &\approx \frac{S_n(x)C_{n+1}(x)}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1-x_{kn}}{x-x_{kn}} \phi(x_{kn}) - \\ &- \frac{S_{n+1}(x)C_n(x)}{2n+3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-x_{kn+1}}{x-x_{kn+1}} \phi(x_{kn+1}) \equiv \bar{S}_n(\phi; x). \end{aligned} \quad (7)$$

Данная формула и обладает упомянутым выше вычислительным свойством, выражающимся в ее эффективности при переходе от данного значения n к последующему. Однако, естественный интерес представляет вопрос о достижимости возможно более высокой степени точности формулы с возможно меньшим числом узлов. Этот вопрос заведомо связан с задачей надлежащего выбора в (7) значений параметра сингулярности x из данного интервала.

Для оценки погрешности справедлива теорема.

Теорема. Если плотность $\phi(t)$ имеет непрерывные производные до $r-1$ -го ($r \geq 1$) порядка, а $\phi^{(r)}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha < 1$), тогда имеет место неравенство

$$|S(\phi; x) - \bar{S}_n(\phi; x)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (8)$$

3. О квадратурных формулах, близких по точности к гауссовским для сингулярных интегралов

Как было указано в начале, построение квадратурной формулы вида (7) было осуществлено по определенному процессу аппроксимации плотности $\phi(t)$, при котором возможно заведомое утверждение точности полученной данным способом квадратурной формулы для любого многочлена степени $\leq 2n$ при значениях $x \in (-1, 1)$. При этом можно распорядиться о таком выборе значений параметра x в указанных пределах, чтобы соответствующая квадратурная сумма содержала бы по возможности меньшее количество слагаемых (т.е., значений плотности $\phi(t)$ в узлах). Как известно, таковыми являются прежде всего уже известные

квадратурные формулы Гаусса. Однако, как уже было оговорено, максимальное число значений параметра x и, тем самым, соответствующих им формул, при которых достижение такой степени точности осуществимо, в известном смысле невелико (в основном на единицу меньше числа узлов самой квадратурной формулы). С этой точки зрения может быть естественным вопрос о возможности построения другого вида квадратурных формул с такой же алгебраической точностью по возможности с наименьшим при этом (однако заведомо большим, чем в гауссовых формулах) числом ординат. Некоторые такие формулы (как и сами известные формулы Гаусса) могут быть получены, как определенные частные случаи общей формулы (7) надлежащим выбором значений x в этой формуле. Ниже приводятся пример такой формулы.

Подчиним параметр x условию $C_{n+1}(x) = 0$, т.е. значения x представляют нули многочлена $\{x_{vn+1}^{(0)}\}_{v=1}^{n+1}$. В данном случае первая сумма в (7) обращается в нуль, тем самым, мы будем иметь квадратурную формулу вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \frac{\phi(t)}{t - x_{vn+1}^{(0)}} dt \approx$$

$$\approx -\frac{C_n(x_{vn+1}^{(0)})S_{n+1}(x_{vn+1}^{(0)})}{2n+3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-x_{kn}}{x_{vn+1}^{(0)} - x_{kn}} \phi(x_{kn}), \quad (v=1, 2, \dots, n+1), \quad (9)$$

что представляет известную в литературе квадратурную формулу Гаусса с числом узлов $n+1$.

Библиографический список

1. Цуцаев, А. О. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности с весовой функцией вида $\sqrt{1+t}/\sqrt{1-t}$ / А. О. Цуцаев, Ш. С. Хубежты // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – С. 20–24.
2. Хубежты, Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности / Ш. С. Хубежты, А. О. Цуцаев // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки – 2015. – № 2 – С.53–57.
3. Корнейчук, А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика / А. А. Корнейчук. – М. : Наука, 1962. – С. 64–74.
4. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наукова Думка, 1976. – 442 с.
5. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 599 с.

6. Хубежты, Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения / Ш. С. Хубежты. – Владикавказ : Изд-во ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. – 236 с.

7. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.

8. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К, 2001. – 508 с.

МЕТОД СИНК-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА И ФРЕДГОЛЬМА

А. Н. Тында, А. А. Старкова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: tyndaan@mail.ru, starkovaalina28@gmail.com

1. Введение

Синк-аппроксимация функций находит широкое применение в теории приближения функций как одной так и нескольких переменных, используется при построении численных методов решения задач математической физики, применяется также в теории квадратурных формул и теории вейвлет-преобразований или всплесков [1, 4]. Одним из важных достоинств синк-функций является удобство их применения в теории кодирования сигналов.

В данной работе предлагается метод простой синк-коллокации для решения интегральных уравнений второго рода, построенный на основе синк-аппроксимации точных решений (с помощью линейной комбинации синк-функций).

Синк-функция на всей вещественной оси определяется следующим образом

$$Sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

На основе (1) для некоторого значения $h > 0$ и целого k определим также функцию

$$S(j, h)(t) = \frac{\sin(\pi(t - jh) / h)}{\pi(t - jh) / h}. \quad (2)$$

Тогда синк-аппроксимация функции $f(t)$ на всей вещественной оси $t \in (-\infty, \infty)$ определяется следующим выражением:

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{k=-N}^N f(kh)S(k, h)(t). \quad (3)$$

Приведем, следуя [1–4], определение используемого класса функций и теорему, дающую теоретическую оценку качества sinc-аппроксимации функций из этого класса.

Определение 1 Обозначим через $H^1(D_d)$ класс функций $f(z)$, аналитичных в области D_d

$$D_d = \{z \in C : |Im(z)| < d\}.$$

Для $0 < \varepsilon < 1$ определим также множество $D_d(\varepsilon)$

$$D_d(\varepsilon) = \left\{ z \in C : |Im(z)| < d(1 - \varepsilon), |Re(z)| < \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

Функция $f(z) \in H^1(D_d)$ если выполняется неравенство

$$N(f, D_d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial D_d} |f(z)| |dz| \right) < \infty.$$

Теорема 1. Пусть α , β и d — положительные константы. Пусть также выполнены условия: 1) $f \in H^1(D_d)$; 2) функция $f(t)$ экспоненциально убывает на вещественной оси и справедлива оценка

$$|f(t)| \leq \alpha e^{-\beta|t|}, \quad \forall t \in R.$$

Тогда справедлива следующая оценка качества аппроксимации

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^N f(kh)S(k, h)(t) \right| \leq \frac{CN^{1/2}}{e^{(\pi d \beta N)^{1/2}}}$$

для некоторого $C > 0$ и шага $h = \left(\frac{\pi d}{\beta N}\right)^{1/2}$.

2. Решение интегральных уравнений II рода

Рассмотрим теперь классические линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода

$$x(t) - \int_a^b h(t, s)x(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (4)$$

$$x(t) - \int_a^t h(t,s)x(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (5)$$

Определим некоторое натуральное значение N , параметры d и β искомой функции и вычислим шаг сетки $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\beta N}}$.

Приближенное решение уравнений (4) и (5) на отрезке $[a, b] = [-Nh, Nh]$ будем искать в виде линейной комбинации синк-функций

$$x(t) \approx x_N(t) = \sum_{k=-N}^N x(kh)S(k, h)(t), \quad t \in [-Nh, Nh]. \quad (6)$$

Введем сетку узлов, равномерно покрывающих отрезок $[-Nh, Nh]$

$$t_k = h(k-1-N), \quad k = 1, 2, \dots, (2N+1),$$

и обозначим $X_k = x_N(t_k)$, $F_k = f(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, (2N+1)$.

Неизвестные значения X_k , $k = 1, 2, \dots, (2N+1)$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$AX = F, \quad (7)$$

где $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{2N+1}$, $X = \{X_j\}_{j=1}^{2N+1}$, $F = \{F_j\}_{j=1}^{2N+1}$.

Компоненты матрицы A вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \int_{-Nh}^{Nh} h(t_i, s)S(-N+j-1, h)(s)ds \quad (8)$$

и

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \int_{-Nh}^{t_i} h(t_i, s)S(-N+j-1, h)(s)ds \quad (9)$$

для уравнений (4) и (5), соответственно. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

Для аппроксимации интегралов (8) и (9) применяются соответствующие квадратурные синк-формулы [1]. Для решения системы (7) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов приближенного решения (6) используются метод Жордана – Гаусса.

3. Численные результаты

Приведем пример решения линейного интегрального уравнения Фредгольма по схеме (6)-(9). В качестве модельной задачи возьмем уравнение

$$x(t) - \int_{-Nh}^{Nh} (ts - 1)x(s)ds = f(t), \quad (10)$$

где правая часть $f(t)$ подобрана таким образом, чтобы точным решением уравнения являлась функция $x^*(t) = \frac{\cos(t+1)}{e^{4|t|}}$.

На рисунках 1–4 приведены графики точного и приближенного решений задачи (10) на отрезке $t \in [-Nh; Nh]$ при различных значениях N с шагом $h = \sqrt{\pi d / (\beta N)}$ с использованием следующих значений параметров: $\beta = 4$, $d = 0.05$.

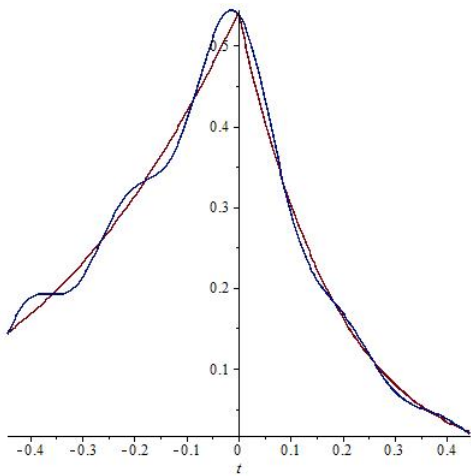


Рис. 1. Погрешность для $N = 5$

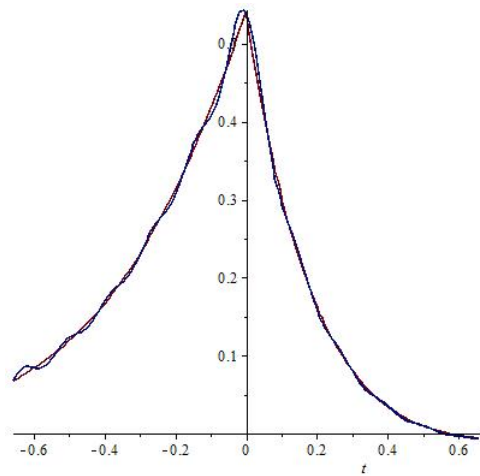


Рис. 2. Погрешность для $N = 11$

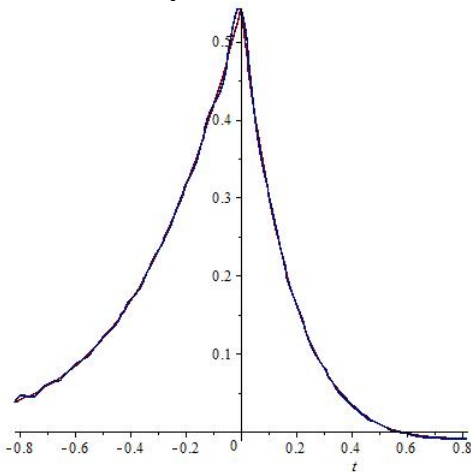


Рис. 3. Погрешность для $N = 17$

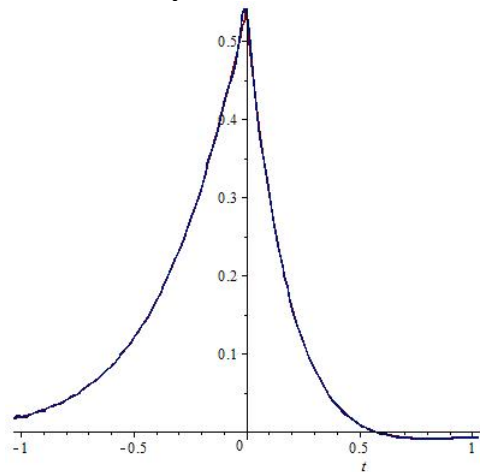


Рис. 4. Погрешность для $N = 27$

Рассмотрим теперь пример решения линейного интегрального уравнения Вольтерра. В качестве модельной задачи возьмем уравнение

$$x(t) - \int_{-Nh}^t \sin(ts + 1)x(s)ds = f(t), \quad (11)$$

где правая часть $f(t)$ подобрана таким образом, чтобы точным решением уравнения являлась функция $x^*(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)e^{2|t|}}$. На рисунках 5-7 приведены графики точного и приближенного решений задачи (10) на отрезке $t \in [-Nh; Nh]$ при различных значениях N с шагом $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\beta N}}$ с использованием следующих значений параметров: $\beta = 2$, $d = 0.1$.

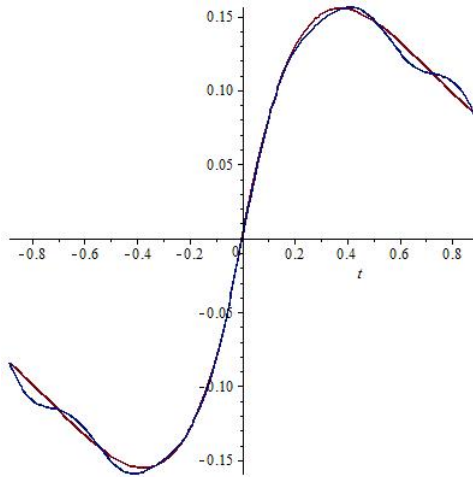


Рис. 5. Погрешность для $N = 5$

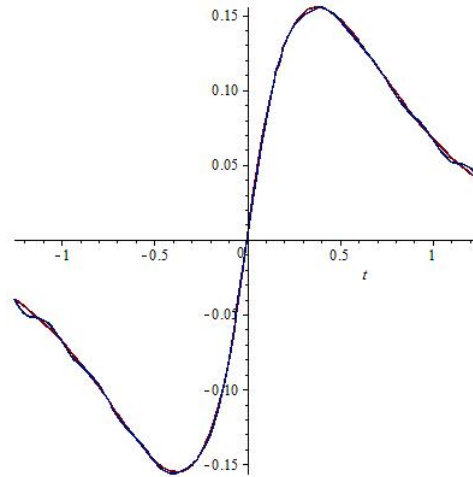


Рис. 6. Погрешность для $N = 10$

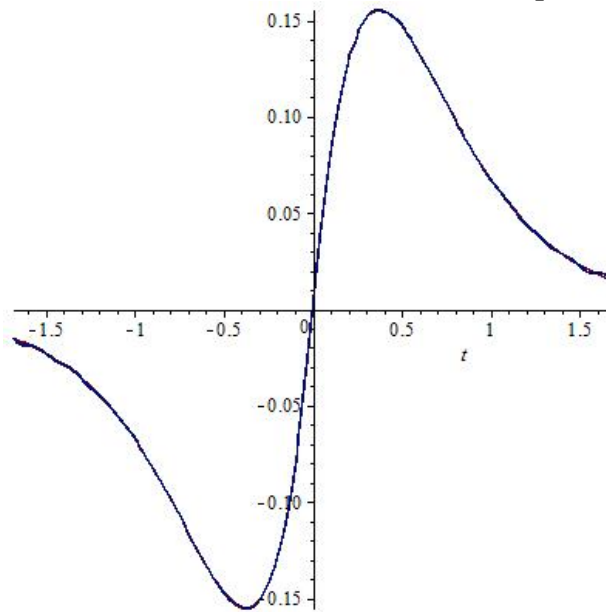


Рис. 7. Погрешность для $N = 18$

Как видно из приведенных результатов, синк-аппроксимация является хорошим инструментом при построении численных решений интегральных уравнений для определенного класса функций. В частности, в модельных задачах (10) и (11) точные решения недифференцируемы в нуле.

Библиографический список

1. Muhammad, M. Solution of integral equations by means of the Sinc collocation method based on the double exponential transformation / M. Muhammad, A. Nurmuhhammad, M. Mori, M. Sugihara // Numerical Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2005. N 177. – Pp. 269–286.
2. Shang, X. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using linear Legendre multi-wavelets / X. Shang, D. Han // Applied Mathematics and Computation. – 2007 – N 191. – Pp. 440–444.
3. Adel Mohsen and Mohamed El-Gamel, A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations, Z. Angew. Math. Phys. – 2007. – N 58. – Pp. 380–390.
4. Stenger, F. Numerical methods based on Sinc and analytic functions / Stenger, F. – N.Y. : Springer, 1993.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ

И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, А. А. Дмитриева, Н. В. Простова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math@pnzgu.ru

В 1975 году Г.И. Марчук предложил [1] простейшую модель инфекционного заболевания, которая состояла из системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями.

Более полная модель иммунного ответа на инфекционное заболевание, учитывающая взаимодействие В- и Т-систем иммунитета, предложена в [2].

Подробное изложение простейшей модели иммунитета содержится в монографии Г. И. Марчука [3]. Модель состоит из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta - \gamma F)V, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu_c(C - C^*), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - (\mu_f + \eta\gamma)F, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m,\end{aligned}\tag{1}$$

где $V(t)$ – концентрация патогенных размножающихся антигенов; $C(t)$ – концентрация плазматических клеток; $F(t)$ – концентрация антител; $m(t)$ – относительная характеристика пораженного органа; β – коэффициент размножения антигенов; γ – коэффициент нейтрализации антигена антителом при их встрече; μ_m – коэффициент восстановления деятельности организма; μ_c – коэффициент, определяющий уровень стабилизации числа плазматических клеток; C^* – постоянный уровень плаз-

матических клеток в здоровом организме; τ – время, в течение которого осуществляется формирование каскада плазматических клеток; α – коэффициент, учитывающий вероятность встреч антител с антигенами и определяющий скорость образования новых клеток; μ_m – коэффициент пропорциональности, характеризующий обратную величину восстановления органа в е раз; σ – некоторая константа, своя для каждого заболевания; ρ – скорость производства антител одной плазматической клеткой; μ_f – коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител; η – коэффициент, определяющий уменьшение числа антител за счет их реакции с антигенами.

Все коэффициенты в системе (1) неотрицательны. Очевидно, в здоровом организме $m(t) \equiv 0$.

Простейшая модель иммунологии и более общие модели иммунного ответа на вирусные и бактериальные заболевания исследовались во многих работах. Были получены достаточные условия устойчивости, исследованы иммунные процессы при различных тяжестих заболевания. Основные результаты исследований опубликованы в монографиях [3–5].

Простейшая модель иммунологии и более общие модели иммунного ответа на вирусные и бактериальные заболевания обобщалась в различных направлениях. В работах [6], [7], [8] исследовалась их устойчивость в предположении, что коэффициенты уравнений модели зависят от времени. Получены достаточные условия устойчивости иммунных процессов в здоровом организме при одноразовом заражении и при хроническом заболевании.

Очевидно, что коэффициенты системы уравнений, моделирующих иммунные процессы, зависят не только от времени, но и от состояния иммунной системы в данный момент времени.

В настоящей работе исследуется простейшая модель иммунологии, учитывающая это обстоятельство.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta(t) - \gamma(t)F(t))V(t), \\ \frac{dC}{dt} &= \varepsilon(m(t))\alpha(t)F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho(t)C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t)) - (\mu_f(t) + \eta(t)\gamma(t))V(t)F(t), \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma(t)V(t) - \mu_m(t)m(t)\varepsilon_1(m(t)).\end{aligned}\tag{2}$$

$$\text{Здесь } \varepsilon(m(t)) = e^{-m(t)} - \frac{m(t)}{e}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

В качестве $\varepsilon_1(m(t))$ можно взять линейную функцию

$$\varepsilon_1(m(t)) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Отличие модели (2) от простейшей модели иммунологии (1) состоит в следующем:

- 1) Коэффициенты в модели (2) зависят от времени;
- 2) В третьем уравнении слагаемое $\rho(t)C(t)$ заменено слагаемым $\rho(t)C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t))$, которое учитывает то обстоятельство, что после отмирания организма иммунные процессы прекращаются (множитель $\theta(1 - m(t))$) и что превращение плазматических клеток в антитела начинается после заражения организма и скорость превращения зависит от степени заражения (множитель $1 - e^{-V(t)}$).

Модель (2) будем исследовать при начальных условиях, описывающих состояние здорового организма, подвергнувшегося заражению:

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \text{ при } t \in [t_0 - \eta, t_0); C(t) = C^*, \\ F(t) &= \rho(t_0) / \mu_f(t_0), \quad m(t) = 0 \text{ при } t \in [t_0 - \eta, t_0]; \\ V(t_0) &= V_0, C(t_0) = C^*, F(t_0) = \rho(t_0)C^* / \mu_f(t_0), m(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также при начальных условиях, описывающих протекание хронического заболевания.

В случае хронического заболевания предполагается, что система (2) имеет решение $(V_*(t), C_*(t), F_*(t), m_*(t))$, которое в момент времени $t = t_0$ получает возмущение $\tilde{V}(t_0)$.

Наряду с моделью (2) рассмотрим еще две модели.

Во-первых, рассмотрим случай, когда организм находится в течение длительного времени в зоне постоянного заражения.

В этом случае математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= (\beta(t) - \gamma(t)F(t))V(t) + q\theta_1(T_0, T_1), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \varepsilon(m(t))\alpha(t)F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*), \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \rho(t)C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t)) - (\mu_f(t) + \eta(t)\gamma(t))V(t)F(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \sigma(t)V(t) - \mu_m(t)m(t)\varepsilon_1(m(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь q – неотрицательный коэффициент,

$$\theta_1(T_0, T_1) = \begin{cases} 1, & t \in T_0 \leq t \leq T_1, \\ 0, & t \in (0, \infty) / [T_0, T_1]. \end{cases}$$

Система уравнений (4) исследуется при двух начальных состояниях:

1) Стационарное состояние, соответствующее состоянию здорового организма в момент t_0 :

$$\begin{aligned} V(t_0) &= 0 \text{ при } t \in [t_0 - \eta, t_0], \\ C(t) &= C^*, F(t) = \rho(t_0) / \mu_f(t_0), m(t) = 0 \text{ при } t \in [t_0 - \eta, t_0] \\ V(t_0) &= V_0, C(t_0) = C^*, F(t_0) = \rho(t_0)C^* / \mu_f(t_0), m(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а также

2) при начальных условиях соответствующих протеканию хронического заболевания.

В этом случае предполагается, что система (4) в промежутке времени $[t_0, T_0)$ имеет решение $(V_*(t), C_*(t), F_*(t), m_*(t))$.

Естественно рассмотреть случай, когда система (4) получает импульсное возмущение в момент времени t_0 (начальное условие) и перманентное возмущение в промежутке времени $[T_0, T_1], t_0 \leq T_0$.

Во-вторых, известно, что скорость иммунных процессов зависит от температуры организма. Обобщение простейшей модели, учитывающее температурный режим представлено в работе [9]. Соответствующая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= (\beta(Q(t)) - \gamma F(t))V(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \varepsilon(m)\alpha(Q(t))F(t - \tau(Q(t)))V(t - \tau(Q(t))) - \mu_c(C(t) - C^*), \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \rho(Q(t))C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t)) - (\mu_f(t) + \eta(t)\gamma(t)V(t))F(t), \quad (6) \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \sigma(t)V(t) - \mu_m(t)m(t)\varepsilon_1(m(t)), \\ \frac{dQ(t)}{dt} &= \alpha_T V(t)F(t) - \mu_T(Q(t) - Q^*). \end{aligned}$$

Здесь $Q(t)$ – температура организма в момент t , $Q^* = 36.6^\circ C$, α_T, μ_T – коэффициенты, характеризующие термодинамические процессы в организме, $\alpha(Q) = \alpha_0(1 + \alpha_1(Q - Q^*))$, α_0 – коэффициент стимуляции при $Q = Q^*$, $\alpha_1 = const > 0$, $\beta(t) = \beta_0 / (1 + \beta_1(Q - Q^*))$, β_0 – коэффициент размножения антигена при температуре организма $Q = Q^*$, $\beta_1 = const > 0$.

В-третьих, в ряде случаев, при «взрывном» размножении антигенов происходит конкуренция среди антигенов за недостающий биологический материал. Эта ситуация описывается введением логистического слагаемого.

В результате модель (2) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= (\beta(t) - \gamma(t, V(t))F(t))V(t) - \gamma_1 V^2(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \varepsilon(m)\alpha(t, V(t))F(t - \tau)V(t - \tau) - \\ &\quad - \mu_c(C(t) - C^*) - \mu_c^*(t)(C(t) - C^*)^2 \theta(C(t) - C^*) \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \rho(t)C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t)) - (\mu_f(t) + \eta(t)\gamma(t)V(t))F(t) \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \sigma(t)V(t) - \mu_m(t)m(t)\varepsilon_1(m(t))\end{aligned}\quad (7)$$

Зависимость коэффициентов $\gamma(t, V(t))$ и $\alpha(t, V(t))$ от антигенов $V(t)$ означает, что, при чрезмерно больших $V(t)$, не все антигены вступают в контакт с антителами из-за нехватки последних. Это обстоятельство может быть формально записано условиями

$$\lim_{V(t) \rightarrow \infty} \gamma(t, V(t)) = 0, \quad \lim_{V(t) \rightarrow \infty} \alpha(t, V(t)) = 0.$$

Учитывая это обстоятельство, по аналогии с математическими моделями экологии [10] система уравнений (7) может быть конкретизирована следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= (\beta(t)V(t) - \frac{\gamma_1 V(t)}{1 + \gamma_2 V(t)}F(t)) - \gamma_3 V^2(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \varepsilon(m)\frac{\alpha_1 V(t - \tau)}{1 + \alpha_2 V(t - \tau)}F(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*) - \\ &\quad - \mu_c^*(t)(C(t) - C^*)^2 \theta(C(t) - C^*) \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \rho(t)C(t)(1 - e^{-V(t)})\theta(1 - m(t)) - (\mu_f(t) + \eta(t)\gamma(t)V(t))F(t) \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \sigma(t)V(t) - \mu_m(t)m(t)\varepsilon_1(m(t)).\end{aligned}$$

Результаты моделирования

Было проведено численное моделирование математических моделей, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (4), (6), (7).

Особое внимание уделялось исследованию влияния времени запаздывания в развитии иммунного ответа на заражение на его динамику. Установлено наличие автоколебаний с увеличивающейся амплитудой в системе, состоящей из уравнений, описывающих динамику концентрации плазматических клеток и концентрацию антител. Это подсказывает необходимость включения в модели Т-супрессоров.

Было исследовано влияние температуры организма на протекание иммунных процессов.

Результаты программной реализации систем (2), (4), (6), (7) представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ (2)							
τ	1	2	3	4	4.5	5	8	9
$V(0)$	2-5	2-5	2-5	6-8	6-8	6-8	6-8	6-8
Результат	В.	В	В	П АВТ	П АВТ	АВТ	Р	Р
	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ (4)							
τ	1	2	3	4	4.5	5	8	9
$V(0)$	2-3	2-3	2	3	3	4	6	7
Результат	В	В	В	П АВТ	П АВТ	АВТ	Р	Р

Таблица 2

	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ (6)							
τ	1	2	3	4	4.5	5	8	9
$V(0)$	0,1	0,1	0,1	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Результат	В	В	В	П АВТ	П АВТ	АВТ	Р	Р
	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ (7)							
τ	1	2	3	4	4.5	5	8	9
$V(0)$	0,1-0,3	0,1-0,3	0,1-0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Результат	В	В	В	П АВТ	АВТ	АВТ	Р	Р

В табл. 1, 2 использованы следующие обозначения: В - выздоровление, П АВТ - переход к автоколебаниям, АВТ- автоколебания с увеличивающейся амплитудой, Р- резонанс. В табл. 1, 2 исследовалась модель со следующими характеристиками: $V(t)$ – концентрация патогенных размножающихся антигенов; $C(t_0) = 0.5$; $F(t_0) = 0.5$; $m(t_0) = 0$; $\beta = 0.1$; $\gamma = 0.2$; $\mu_m = 0.5$; $\mu_c = 0.5$; $\mu_{cl} = 10$; $C^* = 3$; τ – время, в течение которого осуществляется формирование каскада плазматических клеток; $\alpha = 0.1$; $\mu_m = 0.5$; $\sigma = 0.05$; $\rho = 0.35$; $\mu_f = 0.5$; $\eta = 0.2$.

Библиографический список

1. Марчук, Г. И. Простейшая математическая модель вирусного заболевания / Г. И. Марчук // Препринт ВЦ СО АМ СССР. – Новосибирск, 1975. – 22 с.

2. Асаченков, А. Л. Уточненная математическая модель инфекционного заболевания / А. Л. Асаченков, Г. И. Марчук // Математическое моделирование в иммунологии и медицине. – Новосибирск : Наука, 1982. – С. 44–59.
3. Марчук, Г. И. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1991. – 304 с.
4. Белых, Л. Н. Анализ математических моделей иммунологии / Л. Н. Белых. – М. : Наука, 1988. – 192 с.
5. Романюха, А. А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний / А. А. Романюха. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 285 с.
6. Бойков, И. В. Устойчивость простейшей математической модели иммунологии / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, А. А. Дмитриева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – № 4. – С. 32–46.
7. Бойков, И. В. Устойчивость моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответа / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, А. А. Дмитриева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – № 4. – С. 47–57.
8. Boykov, I. V. Stability of mathematical models of immunology / I. V. Boykov, J. F. Zakharova, A. A. Dmitrieva, N. V. Prostova // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. XII Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, 4–6 декабря 2017 г.). Пенза, 2017. – С. 87–108.
9. Бойков, И. В. Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 435–457.
10. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – М. : Наука, 1985. – 182 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

К. С. Дубинина

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия
E-mail: karina.dubinina@mail.ru

Одним из распространенных методов исследования сложных проблем принятия решения для разнообразного круга задач, в том числе экономических, является метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т. Саати [1]. МАИ позволяет понятным и рациональным образом

структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения. МАИ основан на подходе к назначению «весов» конечному набору n сравниваемых объектов на основе матрицы парных сравнений. Данная матрица A формируется экспертами, а искомый весовой вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ вычисляется как собственный вектор этой матрицы, отвечающий максимальному собственному значению.

Формирование матрицы парных сравнений в МАИ требует трудоемкой работы с экспертами и не гарантирует необходимого свойства её совместности из-за избыточности информации о сравнениях. Вариант МАИ, предложенный В. Д. Ногиным [2], оказывается существенно проще МАИ как на стадии формирования матрицы парных сравнений, так и в ходе вычисления весового вектора, позволяя получить схожие результаты.

В данной работе рассматривается подход, связанный с выбором однозначно определяющих матрицу парных сравнений элементов и требующей значительно меньшего числа экспертных оценок, чем в МАИ, и предлагается его программная реализация, основанная на использовании алгоритмов теории графов.

Матрица парных сравнений A должна удовлетворять следующим свойствам:

- 1) все элементы матрицы A положительны: ..
- 2) матрица A обратна симметрична: $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$;
- 3) матрица A обладает свойством совместности: $a_{ik} * a_{kj} = a_{ij}$;
 $\forall k = \overline{1, n}$.

В этом случае число n является наибольшим собственным числом матрицы A , а вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ вектором, удовлетворяющим $A\omega = n\omega$, т.е. собственным вектором, соответствующему собственному значению n .

Пусть в результате экспертного оценивания мы получили элементы первой строки матрицы A . При условии выполнения свойств 1) – 3), имеют место следующие соотношения:

$$a_{ij} = a_{i1} * a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}}, \quad i = \overline{2, n}, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, используя элементы первой строки, мы можем построить всю матрицу парных сравнений, которая будет обладать свойством совместности.

В качестве элементов, однозначно определяющих матрицу парных сравнений не обязательно брать только элементы первой строки и мож-

но перечислить все такие наборы элементов, которые однозначно определяют матрицу парных сравнений.

Определение 1. Набор некоторых элементов матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ выше главной диагонали называется определяющим, если на его основе и с использованием свойств 2) – 3) можно однозначно определить все элементы матрицы A .

Определение 2. Пусть имеется некоторый набор элементов $a_{i_p j_p}$ матрицы A , расположенных выше главной диагонали. Если существует среди этого набора такая тройка элементов $a_{i_a j_a}, b_{i_b j_b}, c_{i_c j_c}$, что $i_a = i_b, j_a = j_c, j_b = i_c$, то такой набор будем называть зависимым. В противном случае – независимым.

Определение 3. Минимальный по числу элементов независимый набор матрицы A будем называть базисным.

Определение 4. Пусть V какой-либо набор элементов $a_{i_p j_p}$ матрицы A . Графом, порожденным набором V , называется неориентированный граф $G = \langle V, Q \rangle$ с множеством вершин V и множеством ребер Q , состоящим из элементов $\langle a_{i_p}, a_{j_p} \rangle$.

Теорема. [2]. Для любого набора элементов $a_{i_p j_p}$, $p = \overline{1, n}$, матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ расположенных выше главной диагонали, следующие высказывания эквивалентны:

- 1) набор элементов $a_{i_p j_p}$ является базисным,
- 2) набор $a_{i_p j_p}$ состоит из $n - 1$ элемента и порожденный им граф является связным,
- 3) набор $a_{i_p j_p}$ состоит из $n - 1$ элемента и является независимым.

Данная теорема определяет правило выбора «определяющего» базисного набора, для построения которого нам потребуется всего $n - 1$ оценка эксперта. Это значительно меньше, чем в обычном МАИ, в котором требуется $\frac{n(n-1)}{2}$ оценок, и в то же время, позволяет нам построить матрицу парных сравнений, не лишенную свойства согласованности.

На практике эксперт может выставлять достоверные оценки лишь при сравнении некоторого набора пар элементов. Таким образом, следует:

- 1) Осуществить проверку, является ли данный набор элементов базисным или определяющим;
- 2) Дать рекомендации в случае, если набор не является базисным или определяющим.

Чтобы определить является ли набор базисным, воспользуемся алгоритмом Уоршелла проверки связности [3],[4] для порожденного графа.

Для неориентированного графа $G = \langle V, Q \rangle$ с множеством вершин V и матрицей смежности D через $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ обозначается последовательность матриц порядка n , элементы которых вычисляются по следующей формуле:

$$S^{(0)} = S_{ij}^{(0)} = D \vee E, \text{ где } E - \text{единичная матрица порядка } n,$$

$$S^{(l)} = S_{ij}^{(l)}, \text{ где } S_{ij}^{(l)} = S_{ij}^{(l-1)} \vee \left(S_{il}^{(l-1)} \& S_{lj}^{(l-1)} \right), \quad l = \overline{1, n}$$

Тогда $S = S(n)$ – матрица связности.

Из полученной матрицы связности находим число p компонент связности, т.е. число максимальных (по включению) связных подграфов графа. Если число компонент связности равно 1, то граф связный. Рассмотрим алгоритм нахождения этого числа:

- 1) положим $p^{(0)} = 1$;
- 2) вычеркнем из матрицы S , начиная с первой строки и первого столбца те строки, в которых 1 расположена в первом столбце, и те столбцы, в которых 1 расположена в первой строке (при этом вычеркиваются строки и столбцы с номерами, соответствующие номерам вершин из одной компоненты связности). Получим матрицу S_1 .
- 3) если все строки и столбцы вычеркнуты, то заканчиваем процесс, и число компонент связности $p = p^{(0)}$. Если нет, то полагаем $p^{(1)} = p^{(0)} + 1$, применяем шаг 2 к матрице S_1 , и т.д.

Если набор элементов оказался базисным, то, используя свойства 1) – 3), определяем остальные элементы матрицы парных сравнений. В противном случае от эксперта требуется дополнительные сравнения пар элементов. Их количество зависит от числа компонент связности. В частности, если число компонент связности $p = 2$, то достаточно добавить одну экспертную оценку, чтобы граф стал связным, в общем случае требуется $p - 1$ экспертная оценка. Эксперт сам может выбрать подходящую пару элементов из разных компонент связности для оценивания. В результате чего получается связный порожденный граф, и, следовательно, базисный набор элементов.

Для определения того, какие вершины принадлежат одной компоненте связности воспользуемся следующим известным алгоритмом:

- 1) В матрице связности S обнуляем столбцы (можно строки), у которых в первой строке стоят единицы. Получаем матрицу S_1 . Соответствующие единицам первой строки номера вершины принадлежат первой компоненте связности, $p = 1$.

- 2) Если $S_1 \neq (0)$, то $p = p + 1$. Находим не нулевую строку S_1 . Пусть ее номер i_1 . Соответствующие единицам i_1 строки номера вершин

принадлежат второй компоненте связности. В матрице S_1 обнуляем столбцы (строки), у которых в строке i_1 стоят единицы. Получаем матрицу S_2 .

Процесс оканчивается, когда матрица $S_t = (0)$. В этом случае все вершины графа будут принадлежать какой-нибудь компоненте связности.

Все изложенные алгоритмы реализованы в программной среде Delphi. Данная программная система позволяет упростить процедуру формирования матрицы парных сравнений при использовании метода анализа иерархий.

Библиографический список

1. Саати, Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Л. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.
2. Ногин, В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев / В. Д. Ногин // ЖВМиМФ. – 2004. – Т. 44, № 7. – С. 1259–1268.
3. Осипова, В. А. Основы дискретной математики / В. А. Осипова. – 2-е изд., доп. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2017. – 157 с.
4. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика / Д. Андерсон; пер. с англ. – М. : И. Д. Вильямс, 2017. – 960 с.

ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЦЕН В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ¹

М. А. Коротченко

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: kmaria@osmf.sccc.ru

В данной работе будут построены оценки метода Монте-Карло для линейных функционалов от решения системы уравнений, описывающих динамику цен на бирже в рамках кинетической модели.

В рассматриваемой модели ценообразования [1, 2] мы изучаем связь количества ордеров на бирже (аналог концентрации вещества) и

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00530-а, 17-01-00698-а, 18-01-00356-а).

частоты сделок (аналог скорости реакции), поэтому модель называется кинетической. Подобно взаимодействиям молекул в газовой динамике, в этой модели сделки рассматриваются как акты кинетических взаимодействий трейдеров, а именно покупателей и продавцов [3, 4]. Снабдим все функции, связанные с покупателями вспомогательным индикатором $\pi = 0$, для продавцов положим $\pi = 1$. Кроме дискретных по времени сделок между двумя этими группами трейдеров, цена актива непрерывно изменяется вследствие случайных колебаний, которые в общем случае описываются некоторым стохастическим дифференциальным уравнением [5, 6]. В будущем процесс ценообразования мы будем моделировать с помощью расщепления на два этапа: непрерывный (или динамический) и дискретный (или кинетический). В данной статье мы ограничимся рассмотрением кинетического этапа.

Обозначим плотность распределения цен, предлагаемых покупателями, через $s(x, t, 0)$, а распределения цен, предлагаемых продавцами, – через $s(x, t, 1)$, здесь x – цена, которую готов заплатить покупатель (bid price) или цена, по которой продавец готов продать (ask price), соответственно. Сделка происходит в момент времени, когда продавец и покупатель достигают согласия по цене. Цену согласия обозначим $r(x, y)$, ее примером может служить полусумма $r(x, y) = (x + y) / 2$. После этого покупатель и продавец меняются ролями.

Поскольку в модели существует комиссия – внешний параметр «цена транзакции» $a > 0$, то в действительности покупатель платит цену $x + a$. Поэтому, став продавцом, он будет просить за товар не менее этой величины. Реальная прибыль продавца равна $x - a$, поэтому, став покупателем, он не будет платить больше этой величины в следующую сделку. В результате мы получим модель, в которой изменение во времени плотности распределения цен трейдеров $s(x, t, \pi)$ описывается следующим дифференциальным уравнением (см., например, [3])

$$s_t^k(x, t, \pi) = Ds^k(x, t, \pi) - ks^k(x, t, 1)s^k(x, t, 0) + \\ + ks^k(x + (-1)^\pi a, t, 1)s^k(x + (-1)^\pi a, t, 0),$$

с начальными данными $s^k(x, 0, \pi) = s_0(x, \pi) \geq 0$, $\pi = 0, 1$. Здесь параметр k – это частота сделок в единицу времени. Вариант с $k \rightarrow \infty$ описывает высокочастотную торговлю [7], которая сейчас является основным видом автоматизированной торговли на финансовых рынках. Заметим, что в простейшем случае броуновского движения с постоянной волатильностью

имеем $Ds^k(x, t, \pi) = \frac{\sigma^2}{2} s_{xx}^k(x, t, \pi)$ [3].

В работе [2] было получено специальное интегральное уравнение второго рода $F = KF + F_0$ для функции $F(Z, t)$ – плотности распределения сделок, в модифицированном фазовом пространстве с $Z = (X, \Pi, \varpi)$, а именно:

$$F(Z, t) = \int\limits_{0\mathbb{Z}} \int\limits_0^t F(Z', t') K(Z', t' \rightarrow Z, t) dZ' dt' + F_0(Z, t).$$

Здесь $dZ = dX d\Pi d\mu(\varpi)$, причем интегрирование по дискретной мере μ означает суммирование по всем упорядоченным парам (i, j) . Ядро K последнего уравнения представляет собой произведение плотностей перехода, то есть содержит дельта-функции только в качестве сомножителей, что позволяет использовать хорошо развитый аппарат весовых методов Монте-Карло [8].

Переход системы в новое состояние осуществляется в соответствии с видом ядра интегрального оператора следующим образом:

1. Выбирается момент времени t следующей сделки согласно экспоненциальной плотности перехода;
2. Выбирается номер $\varpi = (i, j)$ упорядоченной пары трейдеров покупатель-продавец (для метода мажорантной частоты – равновероятно);
3. Определяется цена сделки, выбранные трейдеры меняются ролями.

Численная оценка функционалов

Часто под решением исходной системы уравнений подразумевается оценка линейных функционалов $M_h(T)$ от одночастичной функции распределения $s(x, t, \pi)$, которые интегральным образом могут быть представлены в виде функционалов от решения $F(Z, t)$ интегрального уравнения (см., например, [9]):

$$M_h(T) = \int\int h(x, \pi) s(x, T, \pi) dx d\pi = \int\limits_{\mathbb{Z}} \int\limits_0^T \tilde{H}(X, \Pi, T - t') F(Z, t') dZ dt'.$$

Здесь мы обозначили $\tilde{H}(X, \Pi, t) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_i, \pi_i) \right\} \exp\{-tk(X, \Pi)\}.$

Наличие построенного интегрального уравнения второго рода и связанного с ним марковского процесса динамики цен позволяет применить аппарат весовых алгоритмов метода Монте-Карло [8]. Это даёт возможность исследовать зависимость решения от различных параметров (например, k и a), оценивать параметрические производные, а также уменьшать трудоемкость алгоритмов.

Метод мажорантной частоты

В методе мажорантной частоты, который был предложен в [10] для моделирования столкновительной релаксации N -частичного газа, не требуется на каждом шаге снова вычислять величину $k(X, \Pi)$. Это приводит к линейной зависимости трудоемкости алгоритма от числа моделируемых частиц N .

Пусть существует постоянная мажоранта k_{max} такая, что для всех пар $\varpi = (i, j)$ выполнено неравенство $k_{max} \geq \kappa(\varpi) = \kappa_{ij}$. Пусть

$$k^* = \sum_{i \neq j} \frac{k_{max}}{(N-1)} = N \cdot k_{max} \geq k(X, \Pi), \text{ тогда моделирование динамики цен}$$

будет происходить в соответствии с преобразованным ядром:

$$K^*(X', \Pi \rightarrow X, \Pi) = \sum_{\varpi=(i,j)} K_{\varpi}^*(\varpi) \cdot \left\{ \prod_{m \neq i, m=1}^N \delta(x'_m - x_m) \delta(\pi'_m - \pi_m) \right\} \times \\ \left[\left(1 - \frac{\kappa'(\varpi)}{k_{max}} \right) \delta(x'_i - x_i) \delta(\pi'_i - \pi_i) + \frac{\kappa'(\varpi)}{k_{max}} \frac{\kappa_{ij}}{\kappa'(\varpi)} \right].$$

Здесь использованы следующие обозначения: $K_{\varpi}^*(\varpi) = \{N(N-1)\}^{-1}$ – вероятность *равномерного* выбора пары; $\delta(\cdot)$ – дельта функция Дирака; $\kappa'(\varpi) = \kappa(x'_i, \pi'_i, x'_j, \pi'_j \rightarrow x_i, \pi_i, x_j, \pi_j)$, $p = \kappa'(\varpi) / k_{max}$ – вероятность сделки в выбранной паре, с дополнительной вероятностью $(1-p)$ происходит фиктивная сделка (в выбранной паре ничего не изменяется).

Искомые функционалы также выражаются через решение преобразованного уравнения $F^* = K^* F^* + F_0$:

$$M_h(T) = \int \int_{\mathbb{Z}_0}^T \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_i, \pi_i) \right\} \exp\{-k^*(T-t')\} F^*(Z, t') dZ dt'.$$

Весовые алгоритмы

Введем вспомогательную цепь Маркова $\{Z_n, t_n\}$, $n = 0, 1, \dots, z$, где z – номер последнего взаимодействия, который непосредственно предшествует выходу системы за установленную временную границу T , с нормированной плотностью перехода следующего вида:

$$P(Z', t' \rightarrow Z, t) = P_1(t|Z', t') P_2(\varpi|Z', t) P_3(Z|\varpi, Z', t),$$

и нормированной плотностью $P^{(0)}(Z) \delta(t) \delta(\varpi_0)$ распределения начального состояния (Z_0, t_0) .

Введем случайные веса Q_n по формулам (в обозначениях из [2])

$$Q_0 = \frac{P_0(Z_0)}{P^{(0)}(Z_0)}, Q_n = Q_{n-1} Q(Z_{n-1}, t_{n-1}; Z_n, t_n),$$

причем, множители Q факторизуются:

$$Q(Z', t'; Z, t) = \left\{ \frac{K_t(t' \rightarrow t | Z')}{P_1(t | Z', t')} \right\} \left\{ \frac{K_{\varpi}(\varpi)}{P_2(\varpi | Z', t)} \right\} \left\{ \frac{K_X(Z' \rightarrow Z)}{P_3(Z | \varpi, Z', t)} \right\}.$$

Для оценки величины $M_h(T)$ можно использовать оценку по столкновениям ξ или оценку по поглощениям η – случайные величины, являющиеся функционалами от траекторий моделируемых цепей Маркова (см. примеры использования этих оценок для кинетических моделей в наших работах [11, 12, 13, 14])

$$\xi = \sum_{n=0}^z Q_n \tilde{H}(X_n, \Pi_n, T - t_n), \eta = \frac{Q_z \tilde{H}(X_z, \Pi_z, T - t_z)}{q(X_z, \Pi_z, t_z)},$$

$$\text{где } q(X, \Pi, t') = 1 - \int_0^{T-t'} P_1(\tau | Z', t') d\tau.$$

С помощью метода, предложенного в [9], можно показать выполнение следующей теоремы.

Теорема. При выполнении условий

$$P^{(0)}(X, \Pi) \neq 0, \text{ если } P_0(X, \Pi) \neq 0;$$

$$Q(Z', t'; Z, t) < +\infty, \text{ при } Z', Z \in \mathbb{Z}, t', t < T,$$

имеет место равенство $E\xi = M_h(T)$. Если дополнительно вероятность $q(X, \Pi, t') > 0$, при $t' < T$, то $E\eta = M_h(T)$. Кроме того, если весовые множители равномерно ограничены и $H \in L_\infty$, то существует такое T^* , что при $T < T^*$ дисперсии оценок остаются конечными: $Var\xi < +\infty$ и $Var\eta < +\infty$. □

В [9] показано также, что дисперсии оценок остаются конечными, если при $T > T^*$ осуществляется прямое статистическое моделирование соответственно плотности $P(Z', t' \rightarrow Z, t) \equiv K(Z', t' \rightarrow Z, t)$.

Библиографический список

1. Бурмистров, А. В. Моделирование цены методом Монте-Карло в рамках модели больцмановского типа / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко, М. Reisswich // Материалы XVII Всеросс. конф. молодых ученых по матем.

моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 30 октября – 3 ноября 2016 г.). – Новосибирск, 2016. – С. 29.

2. Бурмистров, А. В. Стохастическая кинетическая модель формирования цены / А. В. Бурмистров, А. В. Новиков // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 7-3(61). – С. 107–112.

3. Burger, M. On a Boltzmann-type price formation model / M. Burger, L. Caffarelli, P. Markowich, M.-T. Wolfram // Proceedings of the Royal Society A. – 2013. – Vol. 469. – № 2157. – 20130126. doi: 10.1098/rspa.2013.0126

4. Коротченко, М. А. Моделирование динамики многочастичных ансамблей при использовании кинетических моделей / М. А. Коротченко, А. В. Бурмистров // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 2(14). – С. 324–330.

5. Новиков, А. В. Усовершенствование стохастической дифференциальной модели ценового ряда / А. В. Новиков, А. В. Бурмистров // Марчуковские научные чтения : тр. Междунар. науч. конф. – 2017. – С. 654–658.

6. Новиков, А. В. Определение коэффициентов в стохастической дифференциальной модели формирования цены / А. В. Новиков, А. В. Бурмистров // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. Естественные и технические науки. – 2018. – № 3. – С. 39–44.

7. Новиков, А. В. Использование торговых алгоритмов в адаптируемой интеллектуальной экосистеме / А. В. Новиков, А. В. Бурмистров // Экономика и бизнес: теория и практика. – 2018. – № 4. – С. 189–198.

8. Mikhailov, G. A. Parametric Estimates by the Monte Carlo Method / G. A. Mikhailov. – Utrecht : VSP, 1999. – 188 p.

9. Михайлов, Г. А. Весовые методы Монте-Карло для приближенного решения уравнения Больцмана / Г. А. Михайлов, С. В. Рогазинский // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 620–628.

10. Иванов, М. С. Метод прямого статистического моделирования в динамике разреженного газа / М. С. Иванов, С. В. Рогазинский. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1988. – 117 с.

11. Korotchenko, M. A. Value modifications of weighted statistical modelling for solving nonlinear kinetic equations / M. A. Korotchenko, G. A. Mikhailov, S. V. Rogazinskii // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2007. – Vol. 22. – N 5. – Pp. 471–486.

12. Burmistrov, A. V. Application of statistical methods for the study of kinetic model of traffic flow with separated accelerations / A. V. Burmistrov, M. A. Korotchenko // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2011. – Vol. 26. – N 3. – Pp. 275–293.

13. Бурмистров, А. В. Весовые алгоритмы метода Монте-Карло для оценки и параметрического анализа решения кинетического уравнения коагуляции / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2014. – Т. 17. – № 2. – С. 125–138.

14. Бурмистров, А. В. Использование оценки по столкновениям при решении уравнения Смолуховского методом Монте-Карло / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Марчуковские научные чтения : тр. Междунар. науч. конф. – 2017. – С. 126–132.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПУТЕМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНОВ И МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ

А. В. Лавров, В. С. Сизиков

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lavrov@corp.ifmo.ru, sizikov2000@mail.ru

Введение

Одной из актуальных задач спектроскопии является задача о разделении (сепарации) непрерывных перекрывающихся спектральных линий [1–5]. В этом случае необходимо разделить перекрывающиеся линии в спектре некоторым способом. Особенностью данной задачи является то, что линии невозможно разделить технически, даже используя спектрометр с повышенной разрешающей способностью. Технически можно уточнить лишь суммарный профиль линий, но сами линии по отдельности не разрешить. Линии (их профили) можно разделить только математико-компьютерным путем. Данная задача относится к так называемым обратным задачам второго типа (когда в принципе невозможно восстановить искомую функцию без математической обработки) [6].

Постановка задачи

Пусть в спектре присутствуют N непрерывных (протяженных, не дискретных) линий с профилями интенсивности $z_j(\lambda)$, $j = \overline{1, N}$, где j – номер линии, а λ – длина волны. Полагаем, что измеряется суммарный спектр-профиль $z(\lambda)$, равный сумме интенсивностей N линий-компонент:

$$z(\lambda) = \sum_{j=1}^N z_j(\lambda) + \delta z, \quad a \leq \lambda \leq b, \quad (1)$$

где $[a, b]$ – пределы суммарного спектра, а δz – шум. В настоящей работе не рассматривается сглаживающее влияние аппаратной функции спектрометра на суммарный спектр. Полагается, что такое влияние устранено [4].

Требуется на основе измеренного суммарного зашумленного спектра $z(\lambda)$ определить количество N линий-компонент и их профили $z_j(\lambda)$.

В общем случае эта задача не имеет однозначного решения, поэтому обычно используют моделирование профилей линий некоторыми функциями (гауссианами, лоренцианами и т.д.).

Существующие решения

В методе Фурье-самодеконволюции спектра [2] для разрешения перекрывающихся линий используется *аподизация* – усечение интерферограммы, по которой с помощью преобразования Фурье вычисляется спектр в фурье-спектрометрах [6, с. 224]. За счёт аподизации ширины линий искусственно уменьшаются (до 5 раз). В результате истинные профили линий-компонент искажаются ради их разрешения. Этот метод позволяет определить количество линий-компонент и их центральные длины волн, но не позволяет определить параметры их профилей (амплитуду и полуширину).

Некоторые методы [1, 3–5, 7] основаны на использовании производных от спектра. Суть методов состоит в том, что нули или экстремумы производных указывают на линии.

Однако реальный (не модельный) измеренный спектр обычно зашумлен и его численное дифференцирование выполняется со значительными погрешностями [5, 7]. Для решения этой проблемы мы предлагаем аппроксимировать спектр *сглаживающим сплайном* и дифференцировать сплайн, как это успешно сделано в работах [5, 7].

Моделирование линий и их аналитическое дифференцирование

Если моделировать каждую линию $z_j(\lambda)$ *гауссианом* (гауссовой функцией):

$$z_j(\lambda) = A_j \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где A_j – амплитуда линии, $\bar{\lambda}_j$ – координата максимума, σ_j^2 – дисперсия, при этом $\tau_j = \sqrt{2 \ln 2} \sigma_j = 1.1773 \sigma_j$ – полуширина гауссиана по уровню 0.5, то аналитическое дифференцирование гауссиана даёт формулы для производных порядков 2 и 4 от $z_j(\lambda)$ по λ [3–7], из которых можно определить A_j и σ_j [7]:

$$A_j = 3 \frac{[z_j''(\bar{\lambda}_j)]^2}{z_j^{(4)}(\bar{\lambda}_j)}, \quad \sigma_j = \sqrt{3 \frac{-z_j''(\bar{\lambda}_j)}{z_j^{(4)}(\bar{\lambda}_j)}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Если же каждая линия $z_j(\lambda)$, $j = \overline{1, N}$, – лоренциан [4, 7] (ср. (2)):

$$z_j(\lambda) = A_j \frac{\tau_j^2}{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2 + \tau_j^2}, \quad (4)$$

где τ_j – полуширина лоренциана по уровню 0.5, то [7]

$$A_j = 6 \frac{[z_j''(\bar{\lambda}_j)]^2}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}, \quad \tau_j = \sqrt{12 \frac{-z_j''(\bar{\lambda}_j)}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Однако заметим, что на практике нельзя дифференцировать непосредственно линии $z_j(\lambda)$, а можно дифференцировать только суммарный спектр $z(\lambda)$ (1). В результате параметры отдельных линий будут определяться по производным суммарного спектра с погрешностями. Поэтому нужно использовать более точные методы сепарации линий (модифицированный метод координатного спуска [5, 7] и др.), полагая в качестве начальных приближений значения N , A_j , $\bar{\lambda}_j$ и σ_j , оцененные по методу производных суммарного спектра.

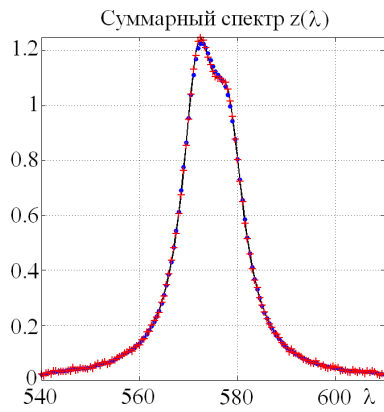
Численные иллюстрации

Сравним результаты сепарации (разделения) линий-компонент методом Фурье-самодеконволюции (ФСД) [2] и методом минимизации функционала невязки (МФН) [4–7] на следующем примере, взятом из [2].

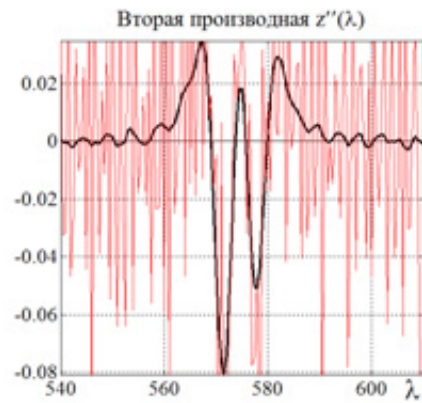
Даны две перекрывающиеся линии-лоренциана вида (4). Амплитуды линий равны $A_1 = 1$, $A_2 = 0.75$, координаты максимумов линий $\bar{\lambda}_1 = 572$, $\bar{\lambda}_2 = 578$, полуширины линий $\tau_1 = \tau_2 = 4$, а расстояние между пиками $\Delta = \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 = 6$. Спектр задан численно с шагом дискретизации $h = \Delta\lambda = 0.5$; пределы: $a = 540$, $b = 610$. Число узлов по λ равно $n = (b - a)/h + 1 = 141$. Все величины в произвольных единицах, отличных от единиц в [2], где вместо λ использовано $1/\lambda$ – волновое число в см^{-1} .

Метод ФСД в работе [2] разделил линии, определил $\Delta = \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1$, но занизил (в 5.3 раза) их полуширины τ (с 4 до 0.75), т.е. исказил профили линий.

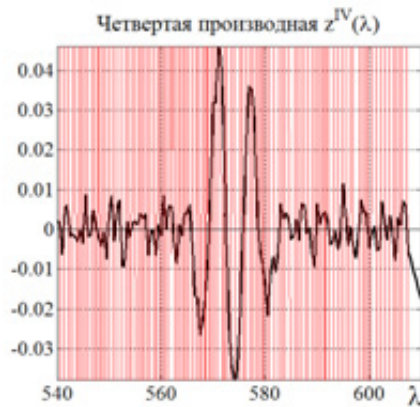
Используем для сравнения метод МФН. Добавим к суммарному спектру $z(\lambda)$ 1%-ный шум ($\delta z = 0.005$). Используем метод производных, а именно, вычислим численно (с помощью m-функции diff.m системы MatLab) производные $z''(\lambda)$ и $z^{IV}(\lambda)$ от зашумленного суммарного спектра $z(\lambda)$. Из рис. 1 видно, что зашумление суммарного спектра даже умеренным 1%-ным шумом ведёт к большим погрешностям производных $z''(\lambda)$ и $z^{IV}(\lambda)$, к так называемым «пилообразным» решениям (ср. [6, с. 232]), по которым невозможно выделить ограниченное количество экстремумов производных $z''(\lambda)$ и $z^{IV}(\lambda)$. Такое поведение производных связано с тем, что дифференцирование (тем более, высокого порядка) зашумленных функций является *некорректной* (неустойчивой) задачей.



а)



б)



в)

Рис. 1. а – суммарный спектр $z(\lambda)$ незашумленный (черная линия), зашумленный (красные плюсы) и сглаживающий сплайн (синие точки); б и в – производные 2-го и 4-го порядков от зашумленного спектра (красные линии) и от сплайна (чёрные линии)

Чтобы сделать вычисление производных устойчивым и умеренно гладким, используем аппроксимацию зашумленного суммарного спектра $z(\lambda)$ сглаживающим кубическим *сплайном* с помощью m-функции `csaps.m`. После сглаживания были вычислены с помощью m-функции `diff.m` производные $z''(\lambda)$ и $z''''(\lambda)$ (рис. 1б,в, чёрным цветом). Видим, что производная $z''(\lambda)$ от сглаженного сплайна имеет два отрицательных экстремума, а производная $z''''(\lambda)$ – два положительных экстремума, и эти экстремумы дают значения $\bar{\lambda}_1 = 571.5$ и $\bar{\lambda}_2 = 578$, близкие точным значениям $\bar{\lambda}_1 = 572$ и $\bar{\lambda}_2 = 578$. По рис. 1 и по формулам (5) можно оценить значения A_1 , τ_1 , A_2 и τ_2 :

$$A_1 = 0.9049, \quad \tau_1 = 4.7307, \quad A_2 = 0.5728, \quad \tau_2 = 4.7329. \quad (6)$$

Однако значения (6) заметно отличаются (особенно A_2) от точных значений

$$A_1 = 1, \quad \tau_1 = 4, \quad A_2 = 0.75, \quad \tau_2 = 4, \quad (7)$$

что объясняется не только зашумлением спектра, но и тем, что дифференцируется суммарный спектр $z(\lambda)$, а непосредственно линии $z_j(\lambda)$ невозможно дифференцировать в силу их недоступности. Это порождает погрешности в определении параметров линий даже в отсутствие шумов, поэтому требуется их дальнейшее уточнение.

Уточнение параметров линий

Для уточнения параметров линий используем модификацию *метода координатного спуска* (КС) [7]. Согласно методу КС, компоненты $z_j(\lambda)$, $j = \overline{1, N}$, суммарного спектра $z(\lambda)$ моделируем гауссианами (см. (2)) или лоренцианами (см. (4)), у каждой линии по три искомым параметра: амплитуда A_j , координата максимума $\bar{\lambda}_j$ и полуширина τ_j (или СКО σ_j).

Далее $3N$ параметров (где N – число линий-компонент) объединяем в вектор

$$p = [A_1, \bar{\lambda}_1, \tau_1, \dots, A_N, \bar{\lambda}_N, \tau_N] \quad (8)$$

длиной $3N$ (в нашем примере $N = 2$). Параметры p_J , $J = \overline{1, 3N}$, находим путем минимизации *функционала невязки* между результатами измерений и расчета:

$$F = \sum_{i=1}^n (\tilde{z}_i - z_i)^2, \quad (9)$$

где $\tilde{z}_i = \tilde{z}(\lambda_i)$ – измеренные значения суммарного спектра, $z_i = z_i(p)$ – рассчитанные значения суммарного спектра, n – число дискретных отсчетов λ , а p – единый вектор (8).

Вводятся также *ограничения на параметры* p_J в виде:

$$p_{\min_J} \leq p_J \leq p_{\max_J}, \quad J = \overline{1, 3N}. \quad (10)$$

В результате расчётов методом КС получены параметры линий:

$$p = [1.0129, 572.04, 4.0332, 0.740, 578.06, 3.9353], \quad (11)$$

почти совпадающие с точными значениями (подробности метода – в [7]).

На рис. 2 представлены линии-лоренцианы, восстановленные методом КС по зашумленным данным, но сглаженным сплайном. Результаты восстановления методом Нелдера–Мида (НМ) выглядят практически такими же.

Заключение

В работе построена следующая цепочка действий в предлагаемой методике разделения линий. Вычисляются численно производные 2-го и

4-го порядков от, вообще говоря, зашумленного суммарного спектра $z(\lambda)$ с использованием сглаживающего сплайна (рис. 1). По производным делается оценка количества линий N и их координат $\bar{\lambda}_j$. Выполняются оценки других параметров линий: амплитуд A_j и полуширин τ_j гауссианов согласно (3) или лоренцианов согласно (5) по производным 2-го и 4-го порядков. Далее эти оценки могут быть начальными приближениями при более точном определении параметров линий методами КС и НМ (рис. 2).

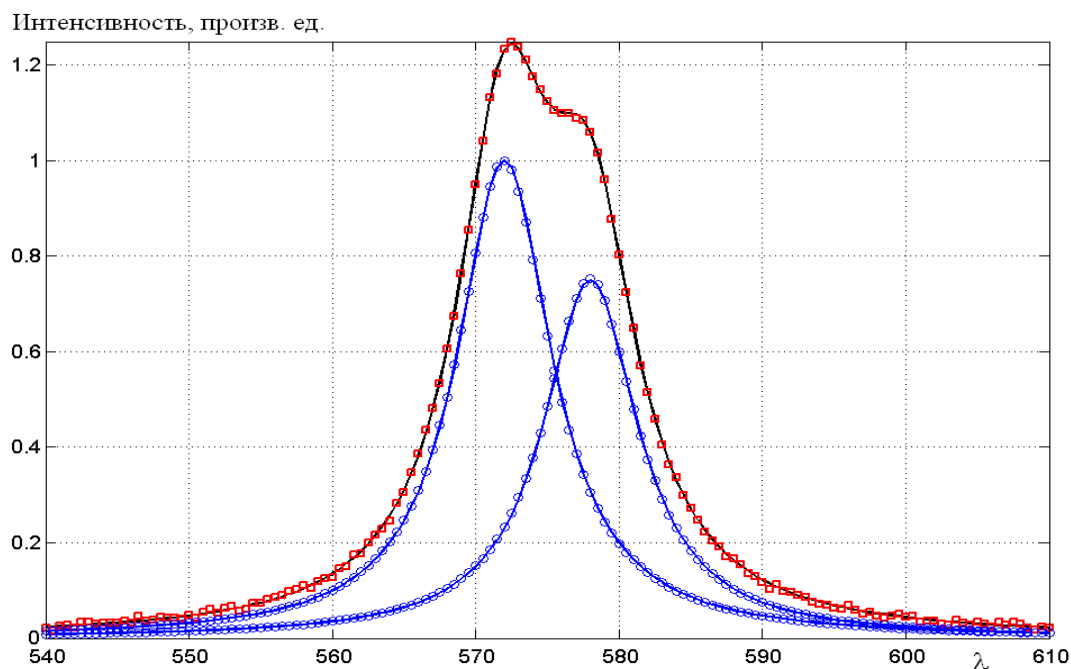


Рис. 2. Восстановление линий-лоренцианов методом КС. Непрерывная чёрная линия – точный суммарный спектр $z(\lambda)$; красные квадратики – зашумленный суммарный спектр $z(\lambda)$; две непрерывные синие линии – точные профили двух линий с параметрами (7); синие кружки – профили двух линий, рассчитанные методом КС (и НМ)

Библиографический список

1. Giese, A. T. The analysis of overlapping spectral absorption bands by derivative spectrophotometry / A. T. Giese, C. S. French // *Applied Spectroscopy*. – 1955. – V. 9. – N 2. – Pp. 78–96.
2. Kauppinen, J. K. Fourier self-deconvolution: a method for resolving intrinsically overlapped bands / J. K. Kauppinen, D. J. Moffatt, H. H. Mantsch, D. G. Cameron // *Applied Spectroscopy*. – 1981. – V. 35. – N 3. – Pp. 271–276.
3. Манойлов, В. В. Возможности алгоритма свертки с производными для оценки параметров масс-спектров, содержащих наложившиеся пики / В. В. Манойлов, И. В. Заруцкий // *Научное приборостроение*. – 2009. – Т. 19, № 4. – С. 103–108.
4. Сизиков, В. С. Сепарация непрерывных линий, взаимно перекрывающихся и сглаженных аппаратной функцией / В. С. Сизиков, А. В. Лавров // *Оптика и спектроскопия*. – 2017. – Т. 123, № 5. – С. 678–688.

5. Сизиков, В. С. Исследование погрешностей некоторых методов разделения перекрывающихся спектральных линий в условиях воздействия помех / В. С. Сизиков, А. В. Лавров // Научно-технический вестник ИТМО. – 2017. – Т. 17, № 5. – С. 879–889.

6. Сизиков, В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии / В. С. Сизиков. – СПб. : Лань, 2017. – 412 с.

7. Сизиков, В. С. Сравнение различных методов разделения непрерывных перекрывающихся спектральных линий / В. С. Сизиков, А. В. Лавров // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 124, № 6. – С. 723–731.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А. Е. Акулова, Н. В. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: alenenok1999@yandex.ru, 89875083153@yandex.ru

Введение

Взаимодействия, для которых зависимость между напряжением и деформацией включает время, называют вязкоупругими. К ним можно отнести полимеры, сплавы, бетоны, горные породы, грунты, лед и т.п. Вязкоупругие взаимодействия обладают следующими свойствами – ползучесть (процесс изменения деформаций тела во времени при постоянном напряжении) и релаксация (процесс изменения напряжения в теле во времени при постоянной деформации). Упругий элемент в вязкоупругих взаимодействиях подчиняется закону Гука (напряжение пропорционально деформации): $\sigma = H * \epsilon$, где H – коэффициент упругости. В вязком элементе напряжение пропорционально скорости деформации: $\sigma = K * \dot{\epsilon}$, где K – коэффициент вязкости. В данной работе проведем обзор существующих математических инструментов описания таких взаимодействий.

Простейшими моделями вязкоупругих тел являются:

1. **Модель Максвелла.** Получается, если соединить упругий и вязкий элементы последовательно, тогда напряжения будут одинаковы, а деформации различны. $\sigma + n * \dot{\sigma} = K * \dot{\epsilon}$, где n – постоянная, которая называется временем релаксации.

2. **Модель Фойгта.** Получается, если соединить упругий и вязкий элементы параллельно. $\sigma = H * \epsilon + K * \dot{\epsilon}$ – закон деформирования простого нерелаксирующего тела.

3. Возможно соединение двух упругих и одного вязкого элемента $E_1 * K * \dot{\varepsilon} + E_1 * E_2 * \varepsilon = K * \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma$, где E – длительный модуль упругости.

Для двух вязких и одного упругого элемента:

$$K_1 * K_2 * \varepsilon + E_1 * (K_1 + K_2) * \dot{\varepsilon} = E_1 * \sigma + K_2 * \dot{\sigma}$$

Для математического описания вязкоупругих взаимодействий используются интегральные уравнения Вольтера 2 рода. Дифференциальные зависимости между напряжением и деформацией можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) * K(t-\tau) d\tau), \quad (1)$$

где $K(t-\tau)$ – ядро интегрального уравнения. Ядро представляет собой линейную комбинацию конечного или бесконечного числа экспоненциальных функций вида

$$K(t-\tau) = \sum A_i * e^{-\alpha_i(t-\tau)}.$$

Часто зависимость (1) пишут в следующем виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) * K(t-\tau) d\tau.,$$

т.е множитель $\frac{1}{E}$ вводится в ядро. Ядро обычно представляет собой положительную монотонно убывающую функцию, асимптотически стремящуюся к нулю. При $t-\tau=0$, согласно экспериментальным данным для обычных материалов, она обращается в бесконечность. При отрицательных значениях $t-\tau$ функция ядра тождественно равна 0.

Закон деформирования можно также записать в следующем виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}(\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) * K(t-\tau) d\tau),$$

считая, что история загрузки элемента начинается не от $-\infty$, а от некоторого начального момента времени, принимаемого за 0 (начальным моментом может являться момент изготовления элемента, подвергающегося деформации).

Простейшим ядром интегрального уравнения является затухающая показательная функция

$$K(t-\tau) = C * e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Это ядро не вполне соответствует опытным данным, так как при $t - \tau = 0$ оно имеет конечную величину, но оно дает понятие в простой форме об основных качественных явлениях линейного деформирования.

Еще одним ядром является ядро, представляющее собой сумму экспоненциальных ядер

$$K(t - \tau) = \sum_{i=1}^n C_i * e^{-\alpha_i (t - \tau)},$$

где все α_i – положительные, неравные друг другу величины. Такие ядра, соответствуют моделям, составленным из упругих и вязких элементов, с числом вязких элементов, большим единицы. Это ядро, в отличие от рассмотренного ранее, может точнее отобразить поведение вязкоупругих материалов, ввиду наличия большего числа параметров.

Также существуют ядра с особенностями, например при сколь угодно большой скорости деформирования, т.е. $\lim_{t - \tau \rightarrow \infty} K(t - \tau) = \infty$.

Ввиду необходимости соблюдения условия конечности интеграла $\int_0^{\infty} K(t - \tau) d\tau$ для длительного модуля упругости E , эта особенность

должна быть слабой, т.е. иметь порядок $\frac{C}{(t - \tau)^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$).

Простейшим видом ядра с особенностью является ядро Дюффинга

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

При $\alpha = 1$ ядро Больцмана

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)}.$$

Постоянную C можно представить в виде: $C = \frac{A}{T^{1-\alpha}}$, где A – безразмерная величина, T – имеет размерность времени. Введем обозначения: $p = \alpha, q = 1 - \alpha, p + q = 1$, тогда ядро будет иметь следующий вид

$$K(t - \tau) = \frac{A}{(t - \tau)^p * T^q}.$$

Кривая ползучести неограниченно возрастает при $(t - \tau) \rightarrow \infty$. Это означает, что длительный модуль упругости $E = 0$. Ввиду этого это ядро пригодно лишь для описания явлений ползучести материалов, деформи-

рующихся при постоянной нагрузке с конечной скоростью вплоть до разрушения, например, для металлов, нагретых до высокой температуры.

Выше были рассмотрены ядра разностного типа, которые подходят нестареющим материалам. Но встречаются материалы, свойства которых с течением времени заметно изменяются. К ним относится бетон, а также железобетон, пластик, лед, грунт, горные породы. Если изменение свойств материала происходит все время в сторону уменьшения его способности деформироваться во времени, то это изменение свойств называют старением материала. Старение материала часто сопровождается уменьшением и его мгновенной деформативности, т. е. увеличением жесткости. Дифференциальное уравнение линейного деформирования для стареющих материалов имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) * K(t - \tau) d\tau \right). \quad (2)$$

Для стареющих материалов в ядрах должны быть определены два параметра: длительность времени загрузки и возраст, при котором образец был загружен.

Переменные во времени свойства материала должны быть найдены из эксперимента. Наиболее просто можно получить кривые изменения деформаций во времени при загрузении постоянной нагрузкой, приложенной в определенный момент времени τ . Такие кривые называют кривыми ползучести. Они включают в себя мгновенную деформацию, возникающую в момент приложения нагрузки, и деформацию ползучести, нарастающую во времени. Уравнение (2) называют неинвариантным во времени линейно-наследственным уравнением ползучести.

Для описания процесса деформирования стареющих материалов аналитические выражения меры ползучести должны быть построены на основе слабосингулярных функций. Для выражения меры ползучести принято следующее выражение, представляющее собой произведение двух функций, одна из которых учитывает процесс старения материала, а другая – влияние длительности его загрузки

$$C(t, \tau) = C_1(t - \tau, \tau) = \varphi(\tau) * f(t - \tau)$$

или в более общей форме

$$C(t, \tau) = C_1(t - \tau, \tau) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(\tau) * f_k(t - \tau),$$

где

$$f(t - \tau) = \int_0^{t-\tau} \mathfrak{E}_\alpha(-\beta, u) du,$$

$\mathcal{E}_\alpha$ – функция Ю.Н. Работнова. Для стареющих материалов можно использовать следующие ядра, например, ядро, предложенное для бетона А.А.Гвоздевым

$$K(t, \tau) = f(t) * \varphi(\tau), t > \tau.$$

Частным случаем является ядро вида: $K(t, \tau) = \varphi(\tau), \tau \leq t$. Деформации здесь изменяются после полной разгрузки за счет изменения мгновенного модуля упругости.

Для стареющих материалов также подходят хорошо исследованные ядра А. Р. Ржаницына и Ю. Н. Работнова.

Ядро Ю. Н. Работнова имеет следующий вид

$$K(t - \tau) = \chi * \gamma_\alpha(\beta, t - \tau) = \chi * \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i * (t - \tau)^{i * (\alpha + 1) + \alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)(i + 1)} \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Способы определения параметров χ, α и β приведены в работах Е.С. Синайского и Е.И. Звонова. Дробно-экспоненциальная функция $\gamma_\alpha(\beta, t)$ и интеграл от нее протабулированы с фиксированной точностью. Эффективность этого ядра связана с тем, что дробно-экспоненциальная функция является резольвентой ядра Абеля:

$$I_\alpha = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Ядро А.Р. Ржаницына

$$K(t - \tau) = \chi * \frac{e^{-\beta(t - \tau)}(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Его резольвента выражается через дробно-экспоненциальную функцию

$$R(t - \tau) = \chi * e^{-\beta(t - \tau)} * \gamma_\alpha(\chi, t - \tau).$$

Библиографический список

1. Малкин, А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев – СПб. : Профессия, 2007. – 560 с.
2. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести /А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1968. – 418 с.
3. Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи теории ползучести / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров. – Ереван : НАК Институт механики, 1990. – 320 с.
4. Развитие контактных задач в СССР ; под ред. Л. А. Галина. – М. : Наука, 1976.
5. Механика контактных взаимодействий ; под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001.

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Ю. В. Аннина

Пензенский государственный университет

г. Пенза, Россия

E-mail: katyshkina.julia@yandex.ru

Современная жизнь невозможна без электронно-вычислительных машин (ЭВМ). В настоящее время каждый индивидуум, в согласовании с собственными запросами, имеет возможность собрать у себя на рабочем столе настоящую рабочую станцию. Во все времена люди хотели владеть приспособлениями, которые могли помочь им разрешать сложные задачи.

Точкой отсчета начала компьютеризации возможно считать начало XVII века (1623 год), когда В. Шикард сделал машину, умеющую складывать и вычитать. Но первым арифмометром, способным исполнять четыре ведущих арифметических операций, стал арифмометр Блеза Паскаля. Основой составляющей в нем было зубчатое колесо, открытие которого уже само стало большим событием в вычислительной технике. В 1671 году философ и математик Густав Лейбниц строит арифмометр на базе зубчатого колеса особой системы – зубчатую колеса Лейбница. Арифмометр Лейбница, как и арифмометры его предшественников, делал четыре ведущих арифметических операций.

Ещё одним знаковым человеком в истории развития вычислительной техники стал математик Чарльз Бэббидж. В 1823 году Бэббидж начал работать над машиной для вычисления полиномов, но, что более интересно, эта машина должна была, кроме непосредственного производства вычислений, выдавать результаты – печатать их на негативной пластине для фотопечати. Планировалось, что машина будет работать при помощи парового двигателя.

Из-за технических проблем Бэббиджу до конца не удалось воплотить в жизнь задуманное. Он хотел построить наружное (периферийное) устройство для выдачи итогов вычислений. Отметим, что Шойц, в 1853 году все же построил машину, задуманную Бэббиджем. Вероятно, Бэббиджу более нравился креативный процесс генерирования свежих мыслей, чем воплощение их в что-то вещественное. В 1834 году он изложил основы работы своей машины, которая была названа им «Аналитической».

Бэббидж сумел довести машину только до стадии экспериментального опыта. Но как раз мысль считается «двигателем» научно-технического прогресса. Машина Чарльза Бэббиджа была воплощением следующих идей:

– управление производственным процессом. Автоматизированная машина управляла работой ткацкого станка, изменяя орнамент образовываемой ткани в зависимости от сочетания отверстий на особой картонной ленте. Лента стала предшественницей таких носителей информации, как перфокарты и перфоленты;

– программируемость. Порядок следования отверстий на ленте определял команды и обрабатываемые командами данные. Графиня Ада Августа Лавлейс участвовала в разработке данной машины. Аду Августа Лавлейс считают первой в мире разработчиком программного обеспечения.

В 1938 году исследования переносятся из Америки в Германию, где Конрад Цузе создает машину, которая оперирует не десятичными числами, а двоичными. Машина была также механической, но ее бесспорным достоинством было то, что в ней была реализована обработка данных в двоичном коде. Цузе в 1941 году сделал электромеханическую машину, арифметические действия в которой выполнялись на основе реле. Также были возможны операции с плавающей точкой. В 1946 году в США, в Пенсильвании, была создана первая универсальная ЭВМ – ENIAC. Она содержала 18 тыс. ламп, весила 30 тонн, занимала площадь примерно 200 квадратных метров и потребляла гигантскую мощность. В ней все ещё применялись десятичные операции.

С ENIAC связано имя ещё одной ключевой фигуры в вычислительной технике – математика Джона фон Неймана. Он впервые внес предложение записывать программу и ее данные в память машины таким образом, чтобы их можно было видоизменить в процессе работы. Главный принцип был применен в последующем, при разработке новой ЭВМ EDVAC (1951 год). В этой машине применяется оперативная память, построенная на ультразвуковых ртутных линиях задержки. Память составляет 1024 символа. После появления EDVAC стало понятным, какие высоты науки и техники могут быть достигнуты тандемом человек-компьютер. До середины 80-х годов процесс эволюции вычислительной техники принято делить на поколения.

Первое поколение ЭВМ (1945-1954 гг.). Складывается стандартный комплект структурных составляющих, входящих в состав ЭВМ: центральный микропроцессор, оперативная память, устройства ввода-вывода (УВВ). Машины строились на ламповой элементной основе, из-за чего потребляли большое количество энергии и были довольно не надежны. С их помощью решались научные ситуации различного рода. Программы машин оформлялись на языке ассемблера.

Второе поколение ЭВМ (1955-1964 гг.). Замену поколений обусловило возникновение новой элементной базы: взамен массивной лампы в ЭВМ стали использоваться маленькие транзисторы. Это в конечном результате привело к сокращению габаритов, увеличению надежности и производительности ЭВМ.

Были известны языки программирования высокого уровня – Algol, FORTRAN, COBOL, основавшие предпосылки переносимого программного обеспечения, не зависящего от ЭВМ. Появились компиляторы, библиотеки подпрограмм.

Третье поколение ЭВМ (1965-1970 гг.). Взамен транзисторов в ЭВМ стали применяться интегральные микросхемы разной степени интеграции. Микросхемы позволили расположить 10-ки составляющих на пластинке в несколько сантиметров. Это не только повысило производительность ЭВМ, но и понизило их габариты и цены. Были известны относительно дешевые и компактные машины – Мини-ЭВМ. Машины становятся совместимы на программно-аппаратном уровне. Первая из таких семейств была серия IBM System/360 и отечественный аналог этого компьютера – ЕС ЭВМ.

Четвертое поколение ЭВМ (1970-1984 гг.). С развитием технологий произошла еще одна замена поколений техники. В 70-е годы проводятся работы по созданию сверхбольших интегральных схем, которые позволили расположить на одном кристалле 10-ки тыс. составляющих. Это повлекло последующее значительное понижение объемов ЭВМ. Работа с программным обеспечением стала более простой, что повлекло за собой рост числа пользователей. При подобной степени интеграции составляющих стало вероятным сделать функционально совершенную ЭВМ на одном кристалле.

В начале 70-х годов компанией Intel [1] был выпущен процессор (МП) 4004. В мире вычислительной техники были лишь только три направленности (супер ЭВМ, гигантские ЭВМ и мини-ЭВМ). Далее к ним прибавилось ещё одно – микропроцессорное. Микропроцессор представляет собой активный блок ЭВМ, предназначенный для арифметической обработки информации на базе принципа микропрограммного управления. По аппаратной реализации микропроцессоры можно разделить на процессоры (полностью включены все функции процессора) и микропроцессоры с маленькой и средней интеграцией. Процессор представлял собой 4-разрядное параллельное вычислительное устройство. Микропроцессор Intel 4004 поддерживал решения арифметических операций: сложение, вычитание, умножение и деление. Изначально применялся только в карманных калькуляторах. Позже область его использования была расширена за счет применения во всевозможных системах управления (например, для управления светофорами). Компания Intel, верно предугадав перспективность процессоров, продолжила активные разработки.

Пятое поколение ЭВМ (1984 г. – наши дни) можно именовать микропроцессорным. В 1976 году компания Intel завершила разработку 16-разрядного микропроцессора 8086. В 1982 году был создан 80286. Этот процессор представлял собой улучшенный вариант 8086. Он под-

держивал уже несколько режимов работы: реальный, когда формирование адреса производилось по правилам i8086, и защищенный, который аппаратно реализовывал многозадачность и управление виртуальной памятью.

В 1985 году компания Intel предположила 32-разрядный процессор 80386, аппаратно совместимый «снизу-вверх» со всеми прошлыми микропроцессорами данной компании. Он был значительно сильнее собственных предшественников, имел 32-разрядную архитектуру и возможность поддержки до 4 Гбайт оперативной памяти.

В работах по созданию СМ ЭВМ внимание акцентировалось на микропроцессорах, обеспечивавшим увеличение производительности вычислительных ансамблей для определенного класса решаемых задач. При этом на выбранном классе алгоритмов мини-ЭВМ СМ3 (СМ4) обеспечивают производительность сравнимую с производительностью больших ЭВМ.

Спецпроцессор преобразования Фурье СПФ СМ был разработан в 1983 году для обработки изображений поверхности планеты в рамках выполнения соответственной программы. Разработка велась вместе с Институтом радиоэлектроники Академии наук СССР. Более жесткие запросы к аппаратной части цифровой обработки предъявляют радиолокационные системы. Главным содержанием цифровой обработки считается фильтрация входных сигналов антенны, частоты сигналов от 10 МГц до 10 ГГц. При обработке цифровых сигналов радиолокатора применяются методы цифровой фильтрации и спектрального анализа (вычисление дискретного и быстрого преобразования Фурье – ДПФ и БПФ), методы корреляционного анализа, обратной свёртки, методы линейного алгоритмирования.

СПФ СМ подключался к ЭВМ СМ 3 (СМ 4) и предназначался для выполнения алгоритмов быстрого преобразования Фурье и иных операций цифровой обработки сигналов.

Функциональные узлы спецпроцессора СПФ СМ построены по конвейерной схеме и соединены между собой в общий конвейер, «сдвигающийся» на 1 слово при поступлении на вход очередного отсчёта, за счёт чего пропускная способность достигает до 400 тыс. от/сек. С помощью СПФ СМ выполняются следующие алгоритмы:

- прямое преобразование комплексного массива (размер массива $N = 2n$ ($n = 1, 2, \dots 12$));
- прямое ДПФ с получением энергетического спектра с вышеуказанными параметрами;
- прямое ДПФ с предварительным взвешиванием преобразуемого массива (при выполнении предварительного взвешивания время увеличивается на 30%);
- обратное ДПФ.

А также операции масштабирования массивов:

- увеличение отсчёта массива в 2-а раза и выявление числа переполнений, числа значащих бит максимального по абсолютной величине числа (мнимые и действительные части рассматриваются как независимые числа, при переполнении производится ограничение);

- уменьшение значений энергетического спектра в 4 раза.

Наборы макрокоманд и модулей системной библиотеки позволяют спецпроцессору выполнять операции ДПФ, свёртку двух действительных массивов, двумерное ДПФ массива, расположенного на магнитном носителе, ДПФ массива большого размера, находящегося на магнитном носителе; взвешивание преобразуемого массива.

Свойства метаматериалов [2] могут использоваться в различных направлениях.

Рассмотрим следующее направление в метаматериалах – аналоговые компьютеры. А точнее, выполнение математических операций, таких как дифференцирование, интегрирование или свертка с помощью метаматериалов.

Традиционные аналоговые компьютеры (вычислительные машины) в виде механических, электронных и гибридных аналоговых компьютеров, были разработаны в прошлом для выполнения различных математических вычислений [3], но они имеют существенные ограничения, в частности, относительно большой размер. Эти компьютеры идеально приспособлены для осуществления автоматического контроля над производственными процессами, потому что они моментально реагируют на различные изменения во входных данных. Такого рода компьютеры широко используются в научных исследованиях. Например, в таких науках, в которых недорогие электрические или механические устройства способны имитировать изучаемые ситуации. В ряде случаев с помощью аналоговых компьютеров возможно решать задачи, меньше заботясь о точности вычислений, чем при написании программы для цифровой ЭВМ. Например, для электронных аналоговых компьютеров реализуются задачи, требующие решения дифференциальных уравнений, интегрирования или дифференцирования.

Рассмотрим понятие «вычислительных метаматериалов», которое используется для выполнения математических операций. Существует два подхода к вычислительным метаматериалам. В первом используются метаповерхности (MS), в которых тонкие плоские метаматериальные блоки выполняют математические операции в пространственной области Фурье. Второй подход основан на функциях Грина (GF), в нем используются многослойные метаматериальные плиты, позволяющие синтезировать математические операции, представляющие интерес.

Остановимся на первом подходе. Второй подход подробно описан в работе [4].

Первый подход основывается на том, что оператор $g(y) = \int f(u)G(y-u)du$ может быть выражен в пространстве Фурье как $\tilde{g}(k_y) = \tilde{G}(k_y)\tilde{f}(k_y)$, где тильда указывает преобразование Фурье. В данном подходе система метаматериалов состоит из трех подблоков: 1 – субблок преобразования Фурье, 2 – блок, подходящего адаптированного пространственного фильтра метаповерхности, который реализует $\tilde{G}(k_y)$ в области Фурье, 3 – подблок обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим двухмерную диэлектрическую плиту с проницаемостью $\mu = \mu_0$ и параболическую вариацию диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(y) = \epsilon_c \left[1 - \left(\pi / (2L_g) \right)^2 y^2 \right], \quad (1)$$

где ϵ_c – диэлектрическая проницаемость в центральной плоскости GRIN, а L_g – характерная длина, является положительной.

Для обратного преобразования Фурье (подблока) используются отрицательные параметры: магнитная проницаемость $\mu = -\mu_0$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon = -\epsilon(y)$.

Относительная диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость равна

$$\frac{\epsilon_{ms}(y)}{\epsilon_0} = \frac{\mu_{ms}(y)}{\mu_0} = i \left(\frac{\lambda_0}{2\pi\Delta} \right) \ln \left(\frac{-iW}{2y} \right), \quad (2)$$

где ограничения на боковые границы $|y| \leq W/2$, λ_0 – длина волны свободного пространства, толщина $\Delta < \lambda_0$.

После присоединения субблока получаем метамагнитную систему с первым дифференциатором. Принцип проектирования может быть применен к любой длине волны.

Вычислительные метаструктуры меньше, чем обычные оптические системы обработки сигналов на основе линзы на несколько порядков. Более того, без аналога цифрового преобразования или других систематических задержек, выполняются математические операции, поскольку электромагнитные сигналы распространяются через очень миниатюрные и компактные вычислительные метаматериалы. Такие конструкции могут потенциально привести к прямому, сверхбыстрому, основанному на волновой физике аналоговому вычислению, решению уравнений и обработке сигналов на аппаратном уровне.

Библиографический список

1. Компания Intel – Общедоступная многоязычная универсальная Интернет-энциклопедия со свободным контентом – URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Intel>, свободный (дата обращения: 01.05.2018).

2. Метаматериал – Общедоступная многоязычная универсальная интернет – энциклопедия со свободным контентом – URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал>, свободный (дата обращения: 01.05.2018).

3. A History of Calculating Machines – URL: <http://ieeexplore.ieee.org/>, свободный (дата обращения: 01.05.2018).

4. Performing Mathematical Operations with Metamaterials –The American Association for the Advancement of Science (AAAS) – URL: <http://www.sciencemag.org/>, свободный (дата обращения: 01.05.2018).

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹

И. В. Бойков, Я. В. Зелина

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
e-mail: math@pnzgu.ru, zeywa@yandex.ru

1. Введение

При решении многих задач физики и техники (в частности задач оптики, локации, астрофизики, геофизики и т. д.) возникает ситуация, когда доступными измерениям являются только амплитуда спектра сигнала или только его фаза. Задача определения фазы спектра сигнала по амплитуде спектра называется фазовой проблемой и, наоборот, задача определения амплитуды спектра сигнала по фазе спектра называется амплитудной проблемой. В общем случае говорят об амплитудно-фазовой проблеме.

Напомним, что спектром сигнала (как в непрерывном, так и в дискретном случае), называют соответствующее Фурье-преобразование сигнала.

Решению амплитудно-фазовой проблемы посвящена обширная литература, подробная библиография которой приведена в [1]. Несмотря на многочисленные работы, амплитудно-фазовая проблема далека от разрешения даже в одномерном случае, причем остались открытым как прикладные, так и теоретические вопросы. В частности, в случае одномерных непрерывных сигналов $f(x)$, $-\infty \leq x \leq \infty$, амплитудно-фазовая проблема решена, если известно, что в верхней (или нижней) полуплоскости плоскости комплексной переменной z нет нулей функции $F(z)$, являющейся Фурье-преобразованием функции $f(x)$. Аналогично, в слу-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

чае дискретных сигналов $f(u), u = 0, 1, 2, \dots, n$, амплитудно-фазовая проблема решена, если известно, что в круге $|z| \leq 1$ (или в области $|z| \geq 1$) нет нулей функции $F(z)$, являющейся z -преобразованием последовательности $f(u), u = 0, 1, 2, \dots, n$. Однако эта дополнительная информация, как правило, неизвестна, что может привести к значительным погрешностям. Отметим, что эффективный практический алгоритм Гершберга – Сэкстона (см. [2]), предложенный в 1972 году и широко используемый при решении прикладных задач во многих разделах физики, требует дополнительной информации об исследуемом объекте – регистрации в плоскости изображения и в Фурье-плоскости. И, кроме того, до сих пор для него не получено полного теоретического обоснования.

В значительно меньшей степени исследована амплитудно-фазовая проблема в двумерном случае. Как отмечается в [1], в представляющем основной практический интерес двумерном случае остаются открытыми не только многие теоретические вопросы, но и основной практический вопрос создания быстрого и устойчивого алгоритма восстановления.

В данной работе для непрерывных изображений предложен приближенный метод решения амплитудно-фазовой проблемы в двумерном случае. Метод основан на применении аппарата сингулярных интегральных уравнений.

Аналогичные методы решения амплитудно-фазовой проблемы для дискретных и непрерывных одномерных отображений представлены в работах [3] и [4] соответственно.

2. Приближенное решение амплитудно-фазовой проблемы в двумерном случае

Постановка задачи. Пусть в ограниченной области Ω задано изображение $f(x_1, x_2)$. Будем считать, что функция $f(x_1, x_2)$ ограничена. Продолжим $f(x_1, x_2)$ на плоскость R_2 нулем. Обозначим через $F(\omega_1, \omega_2)$ преобразование Фурье функции $f(x_1, x_2)$. Представим $F(\omega_1, \omega_2)$ в виде $F(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)e^{i\varphi(\omega_1, \omega_2)}$.

Фазовая проблема заключается в том, чтобы по амплитуде $A(\omega_1, \omega_2)$ функции $F(\omega_1, \omega_2)$ найти ее фазу $\varphi(\omega_1, \omega_2)$.

Амплитудная проблема заключается в том, чтобы по фазе $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ функции $F(\omega_1, \omega_2)$ найти ее амплитуду $A(\omega_1, \omega_2)$.

Для решения амплитудно-фазовой проблемы ниже предлагается ее моделирование соответствующими нелинейными сингулярными интегральными уравнениями.

Возможно несколько подходов к решению этих проблем.

В качестве одного из них рассмотрим подход, основанный на моделировании задачи системой одномерных сингулярных интегральных уравнений.

Обозначим через $\theta(t)$ функцию Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\Omega = [0, 1]^2$. В этом случае функцию $f(x_1, x_2)$ можно записать как

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\theta(x_1), \quad (1)$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\theta(x_2). \quad (2)$$

Применяя к выражениям (1)-(2) преобразование Фурье, приходим к уравнениям

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1, \quad (3)$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2. \quad (4)$$

Из (3)-(4) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2. \quad (5)$$

Разделяя в (3), (4) действительные и мнимые части, получаем [1] аналоги одномерных преобразований Гильберта по срезам

$$U(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1, \quad (6)$$

$$V(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1, \quad (7)$$

$$U(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2, \quad (8)$$

$$V(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2, \quad (9)$$

где

$$F(\omega_1, \omega_2) = U(\omega_1, \omega_2) + iV(\omega_1, \omega_2).$$

Воспользовавшись выражениями (6)-(9), получаем систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений, дающих приближенное решение амплитудно-фазовой проблемы.

Действительно, т.к.

$$F(\omega_1, \omega_2) = U(\omega_1, \omega_2) + iV(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)e^{i\varphi(\omega_1, \omega_2)},$$

то

$$|F(\omega_1, \omega_2)|^2 = |U(\omega_1, \omega_2)|^2 + |V(\omega_1, \omega_2)|^2 = |A(\omega_1, \omega_2)|^2 \quad (10)$$

Отсюда и из (7) следует уравнение

$$|U(\omega_1, \omega_2)|^2 + \frac{1}{\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 \right|^2 = |A(\omega_1, \omega_2)|^2. \quad (11)$$

В уравнении (11) переменная ω_1 является параметром.

Взяв на сегменте $[-B, B]$, где B – достаточно большое число, точки $-B \leq \omega_2^1 < \omega_2^2 < \dots < \omega_2^N \leq B$, приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$|U(\omega_1, \omega_2^k)|^2 + \frac{1}{\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2^k)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 \right|^2 = |A(\omega_1, \omega_2^k)|^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Приближенно решив систему уравнений (12) при $\omega_1 = \omega_1^k, k = 1, 2, \dots, N$, находим значения функции $U(\omega_1, \omega_2)$ на сетке узлов $U(\omega_1^k, \omega_2^l), k, l = 1, 2, \dots, N$, где $\omega_1^k, k = 1, 2, \dots, N$, множество узлов $-B \leq \omega_1^1 < \omega_1^2 < \dots < \omega_1^N \leq B$.

Определив теперь $V(\omega_1^k, \omega_2^l), k, l = 1, 2, \dots, N$, по формуле (10), находим

$$\varphi(\omega_1^k, \omega_2^l) = \text{arctg} \frac{V(\omega_1^k, \omega_2^l)}{U(\omega_1^k, \omega_2^l)}, \quad k, l = 1, 2, \dots, N.$$

Аналогичным образом, из уравнений (8)-(9) и формулы (10) получаем нелинейное сингулярное интегральное уравнение

$$|U(\omega_1, \omega_2)|^2 + \frac{1}{\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2 \right|^2 = |A(\omega_1, \omega_2)|^2. \quad (13)$$

Уравнения (13) решаются по такой же вычислительной схеме, как и уравнение (11).

Библиографический список

1. Новейшие методы обработки изображений / А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман; под ред. А. А. Потапова – М. : Физматгиз. 2008. – 496 с.
2. Кузнецова, Т. И. О фазовой проблеме в оптике / Т. И. Кузнецова // УФН. – 1988. – Т. 154, № 4. – С. 677–690.
3. Бойков, И. В. Приближенное решение амплитудной и фазовой проблем для одномерных дискретных отображений / И. В. Бойков, Я. В. Зелина // Вопросы радиоэлектроники. – 2017. – № 12. – С. 89–92.
4. Бойков, И. В. Приближенное решение амплитудной и фазовой проблем для одномерных непрерывных отображений / И. В. Бойков, Я. В. Зелина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. XI Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – 324 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТЫХ КОНТАКТНЫХ СИСТЕМ КОММУТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

И. В. Гордюшкин, А. Н. Литвинов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: fzopgu@mail.ru, gordyushkin.ilya@yandex.ru

Вакуумные коммутрующие устройства (ВКУ) находят широкое применение в высоковольтной и высокочастотной аппаратуре различного назначения. Существенной особенностью ВКУ является то, что контакты, являющиеся одним из основных элементов ВКУ, размещены в высоком вакууме. Это позволяет располагать контакты с малым зазором, что обеспечивает малое время срабатывания и большое количество циклов коммутационных операций. Работа в вакууме позволяет обеспечить работу ВКУ в замкнутом и разомкнутом состоянии в сложных условиях их эксплуатации.

Область применения ВКУ постоянно расширяется, а требования по их надежности повышаются в части уменьшения времени срабатывания, увеличения количества циклов срабатывания, повышения электропрочности, снижение тока утечки и т. п. Это вызывает необходимость разработки новых и модернизации существующих конструкций ВКУ с учетом предъявленных к ним требований. При этом одним из основных элементов конструкции ВКУ является контактная группа, так как ее конструктивные особенности и состояние контактирующих поверхно-

стей существенным образом определяет надежность работы ВКУ [1], особенно при внешних динамических воздействиях.

Одним из основных требований к контактным системам ВКУ является обеспечение их виброустойчивости в широком частотном диапазоне внешних воздействий, что позволяет исключить их дребезг, самопроизвольное замыкание и размыкание, а также уменьшить износ контактов. Вопросы конструкторско-технологического обеспечения качества контактирующих поверхностей контактных систем ВКУ рассмотрены в работах [1,2].

Рассмотрим расчетную схему балочного контактного узла (КУ) типового ВКУ, находящегося в замкнутом состоянии, представленную на рис. 1.

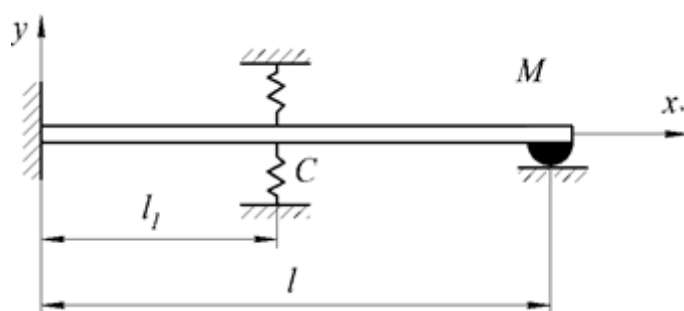


Рис. 1. Расчетная схема балочного КУ

На конце балки КУ длиной l расположена масса контакта M , а на расстоянии l_1 расположена промежуточная упругая опора жесткостью C . Материал балки характеризуется модулем упругости E , а ее поперечное сечение моментом инерции J . Введение промежуточной упругой опоры обусловлено тем, что в большинстве ВКУ имеются разделительные мембраны или сильфоны, разделяющие вакуумную и газонаполненную среды, через которые проходит балочный элемент КУ. Таким образом, промежуточная упругая опора имеет жесткость, равную жесткости разделительной мембраны (сильфона) в плоскости перемещения балки КУ.

При действии вибрации в направлении оси y , конструктивно обеспечивается контактное усилие P , величина которого при вибрационном воздействии является переменной [3]. При проектировании КУ необходимо выполнять динамический расчет для разомкнутого [4] и замкнутого состояний КУ с целью обеспечения его вибропрочности и виброустойчивости при эксплуатационных воздействиях на ВКУ.

Аналогично [4], введем безразмерные параметры КУ: $x = x_* / l$ – безразмерная координата $0 \leq x \leq 1$; $\beta = l_1 / l$ – координата положения упругой опоры; $c = Cl^3 / EJ$ – относительная жесткость упругой опоры; $n = M / M_0$ – относительная масса контакта, где M_0 – масса контактной балки. Переход к безразмерным параметрам позволяет производить ма-

тематическое моделирование и численные исследования динамики КУ при произвольном расположении упругой опоры ($0 \leq \beta \leq 1$) и произвольных значениях ее относительной жесткости c .

Уравнение для изгибных форм $\phi(x)$ собственных колебаний контактной балки КУ в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \alpha^4 \phi(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь α_j^4 - безразмерные частотные коэффициенты, определяющие собственные частоты ω_j для КУ, соответствующие j -ой форме колебаний:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}, \quad (2)$$

Частотные коэффициенты α_j , являются функциями f_j безразмерных параметров КУ $\alpha_j = f_j(\beta, c)$.

Задача имеет аналитическое решение для форм колебаний, которые определяются через функции Крылова U, V, S, T , аналогично [4]:

$$\begin{aligned} & - \text{при } 0 \leq x \leq \beta: \phi(x) = \phi_1(x) = C_1 U(\alpha x) + C_2 V(\alpha x); \\ & - \text{при } \beta < x \leq 1: \phi(x) = \phi_1(x) - \frac{c}{\alpha^3} \phi(\beta) V[\alpha(x - \beta)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Удовлетворяя граничным условиям в зоне расположения контактной массы ($x=1$), и, учитывая, что при $x=\beta$ $\phi(x) = \phi(\beta)$, получим систему однородных уравнений относительно неизвестных постоянных C_1, C_2 и $\phi(\beta)$. Из условия нетривиальности решения этой системы получим трансцендентное частотное уравнение для определения частотных коэффициентов α_j :

$$\begin{aligned} & c \left\{ U(\alpha\beta) \{ T[\alpha(1-\beta)] V(\alpha) - T(\alpha) V[\alpha(1-\beta)] \} - \right. \\ & \left. - V(\alpha\beta) \{ T[\alpha(1-\beta)] U(\alpha) - S(\alpha) V[\alpha(1-\beta)] \} \right\} + \\ & + \alpha^3 [T(\alpha) U(\alpha) - S(\alpha) V(\alpha)] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Минимальный корень этого трансцендентного уравнения определяет частотный коэффициент α_1 для основной собственной частоты ω_1 КУ (2). Корни частного уравнения определяются численным методом с точностью 10^{-3} .

Численные исследования, проведенные в широком диапазоне изменения безразмерных параметров КУ, позволили построить номограм-

мы для определения частотных коэффициентов α_j . Наибольший интерес представляет минимальный коэффициент α_1 , соответствующий низшей собственной частоте КУ, на которой возможен его резонанс, приводящий к нарушению условия сохранения контакта и дополнительному износу контактных поверхностей.

В качестве примера на рис. 2 представлены зависимости частотного коэффициента α_1 от параметров c , β . На рисунке показано максимальное значение частотного коэффициента α_1 и параметры, при которых достигается это значение.

Полученные результаты показывают, что частотный коэффициент и, следовательно, собственная частота балочного КУ, существенно зависит от параметров c и β , что позволяет без увеличения массогабаритных параметров КУ повысить его собственные частоты.

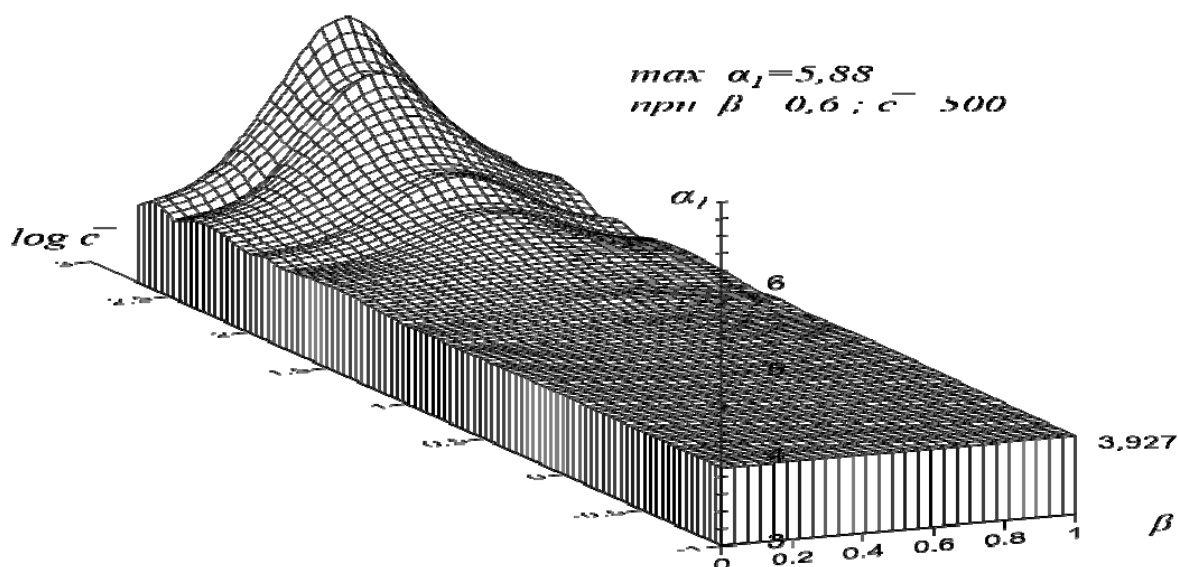


Рис. 2 Зависимости α_1 от параметров β , c

Анализ результатов численного расчета (рис. 2), показывает, что максимальное значение основной собственной частоты соответствует относительной жесткости $c=500$ и положению упругой опоры $\beta=0,6$; т.е. $l_1=0,6l$ (рис. 1). Зависимости частотного коэффициента α_1 и собственной частоты ω_1 от параметров КУ (β , c , EJ , ω_0) позволяет выявлять резонансные зоны КУ в заданном частотном диапазоне внешних динамических воздействий и моделировать динамическое поведение КУ при экспериментальных исследованиях и эксплуатационных воздействиях на ВКУ.

Моделирование динамического поведения КУ позволяет научно обоснованно выбирать требуемые характеристики КУ (l_1 , c , l^3/EJ), обеспечивающие его виброустойчивость в замкнутом состоянии. Для проверки выполнения условия сохранения контакта необходимо, в соответ-

ствии с методикой [3], для частотного коэффициента α_1 , соответствующего спроектированному КУ, через гармонические коэффициенты влияния определить формы колебаний $\phi(\alpha_1)$ и проверить выполнение этого условия в эксплуатационном частотном диапазоне.

Предложенную методику расчета собственных частот балочных КУ рекомендуется применять на ранних этапах проектирования ВКУ, что позволяет принимать научно обоснованные конструкторско-технологические решения по обеспечению виброустойчивости ВКУ и сокращает сроки и экономические затраты на их проектирование.

Библиографический список

1. Бочкарев, В. С. Особенности работы высокочастотных вакуумных выключателей и переключателей в высокочастотных цепях / В. С. Бочкарев // Электронная техника. Сер. Радиодетали и радиокомпоненты. – 1988. – Вып. 4 (61). – С. 39–42.
2. Акимов, А. А. Конструкторско-технологические способы повышения качества вакуумных коммутирующих устройств / А. А. Акимов // Современная техника и технология: проблемы, состояние и перспективы. материалы VII Всеросс. НПК с междунар. участ. / под ред. С. А. Гончарова. – Рубцовск : Изд-во Рубцовского индустриального ин-та, 2017. – С. 38–73.
3. Литвинов, А. Н. Моделирование динамических процессов в изделиях приборостроения / А. Н. Литвинов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – 198 с.
4. Akimov, A. A. Vibration resistance analysis of contact systems in vacuum switching devices / A. A. Akimov // International Scientific – Practical conf. “Information Innovative Technologies”. – Prague, 2018. – P. 108–112.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А. Н. Банникова, Н. А. Мартышкина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: bannikowaanactasia@yandex.ru, martyshkina2010@yandex.ru

Изображения часто искажаются шумом, появляющимся во время отправки, получения и т. п. Поэтому одной из основных задач обработки изображения является восстановление изображения путем подавления шума.

Модель процесса искажения предполагает действие некоторого искажающего оператора H на исходное изображение, что после добавления аддитивного шума дает искаженное изображение. Если H – линейный трансляционно-инвариантный оператор, то модель процесса искажения может быть представлена в пространственной области в виде:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \quad (1)$$

где $f(x, y)$ – исходное неискаженное изображение, $h(x, y)$ – функция, представляющая искажающий оператор в пространственной области, $\eta(x, y)$ – аддитивный шум, $g(x, y)$ – результат искажения, а символ «*» используется для обозначения свертки.

Свертка – это операция применения искажающей функции к другой функции (к изображению, в данном случае), т.е. некоторая область исходного изображения сворачивается в один пиксель искаженного изображения.

Математически для изображения $f(x, y)$ с размерами $M \times N$ и искажающей функции $h(x, y)$ с размерами $m \times n$ записывается так:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) = \sum_{i=-a}^a \sum_{j=-b}^b h(i, j) f(x+i, y+j), \quad (2)$$

где $a = (m-1)/2$, $b = (n-1)/2$.

В пространственной области свертка эквивалентна умножению в частотной области. В частотной области это записывается следующим образом

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v), \quad (3)$$

где обозначенные заглавными буквами функции суть фурье-образы соответствующих функций (1) в пространственной области.

Задача восстановления искаженного изображения $g(x, y)$ заключается в нахождении наилучшего приближения $\hat{f}(x, y)$ исходного изображения. Качество восстановления зависит от имеющейся информации об искажающей функции и характеристиках шума в (1).

Модель процесса искажения и восстановления изображения иллюстрирует рис. 1.

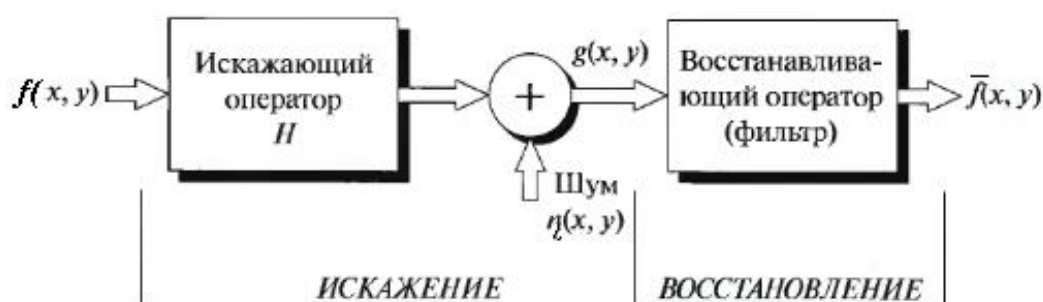


Рис.1. Схема процесса искажения и последующей коррекции изображений

Когда искажение изображения обусловлено исключительно наличием шума, равенства (1) и (2) приобретают вид:

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y) \quad (4)$$

и

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v) \quad (5)$$

В этом случае для восстановления изображения пространственная фильтрация является самым оптимальным методом.

Для восстановления изображения выбран среднегармонический фильтр. Результат обработки с применением этого фильтра дается выражением:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}} \quad (6)$$

Среднегармонический фильтр хорошо работает в случае униполярного «белого» импульсного шума, но не работает в случае униполярного «черного» импульсного шума. Этот фильтр также хорошо работает для гауссова шума.

Функция подавления шума на языке C++ выглядит следующим образом:

```
void sgl(a, b, **m1, **m2)
{
    double sumb, sumr, sumg;
    for(i=1; i<a-1; i++)
        for(j=1; j<b-1; j++)
        {
            sumb=0; sumg=0; sumr=0;
            for(k=-1; k<=1; k++)
                for(l=-1; l<=1; l++)
                {
                    sumb+=1.0/m1[i+k][j+l].rgbBlue;
                    sumg+=1.0/m1[i+k][j+l].rgbGreen;
                    sumr+=1.0/m1[i+k][j+l].rgbRed;
                }
            m2[i][j].rgbBlue=(3*3)/sumb;
            m2[i][j].rgbGreen=(3*3)/sumg;
            m2[i][j].rgbRed=(3*3)/sumr;
        }
}
```

В эту функцию мы передаем: a , b – размеры изображения, $m1$ – массив значений яркости искаженного изображения и $m2$ – массив значений яркости восстановленного изображения.

Результатом вычислений функции *sgl* является восстановленное по формуле (6) изображение $m2$.

Время обработки изображений существенно зависят от размеров самого изображения. Процесс распараллеливания позволит сократить время обработки. Поэтому для изображений большого размера целесообразно использовать параллельный алгоритм.

Для экспериментальной оценки ускорения параллельного алгоритма были разработаны последовательная и параллельная программы. Последовательная программа была реализована на языке C++ и скомпилированы с помощью компилятора gcc 5.4.0. Параллельная программа также реализована на языке C++ с помощью технологии MPI. Эксперименты с программой проводились на компьютерах на базе процессора Intel Core i3, 3,5 ГГц, 8 Гб ОЗУ под управлением операционной системы Ubuntu 16.04. В эксперименте были исследованы последовательная программа и двухпроцессный вариант выполнения параллельной программы.

В процессе эксперимента замеры времени работы параллельной и последовательной программы и посчитали ускорение. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты эксперимента

Размер изображения	Последовательный алгоритм, время, мс	Параллельный алгоритм	
		2 процесса	
		Время, мс	Ускорение
1020×768	267440	157545	0.59
600×400	105930	90218	0.85
300×200	33252	37834	1.13

Как видно из результатов эксперимента, время параллельной программы немного ниже последовательного алгоритма (см. табл. 1), так как вычисления выполняются на двух процессах одновременно. Путем распараллеливания не удалось достигнуть сокращения времени в два раза, это может быть объяснено издержками на взаимодействие процессов.

Библиографический список

1. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М. : Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Розенфельд, А. Распознавание и обработка изображений / А. Розенфельд. – М. : Мир, 1972. – 230 с.
4. Сойфер, В. А. Компьютерная обработка изображений / В. А. Сойфер // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – Ч. 2. Методы и алгоритмы. – Вып. 3.
5. Гергель, В. П. Современные языки и технологии параллельного программирования : учебник / предисл. В. А. Садовничий. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2013. – 408 с.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЛАВИН В КИСЛОРОДЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО¹

А. А. Зайцева

Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: a.zaitseva2@g.nsu.ru

В работе моделируется процесс образования электронной лавины в кислороде – стремительного увеличения числа свободных частиц. Это происходит под действием постоянного электрического поля, которое, действуя на свободный электрон, постепенно сообщает ему энергию, достаточную для ионизации газа. При этом число частиц в системе растет экспоненциально.

За основу был взят трехмерный параллельный алгоритм ELSHOW, который разработан для аналогичной задачи в азоте. В статье [1] подробно описан алгоритм моделирования переноса электронов в газе. В данной работе построен алгоритм метода Монте-Карло, учитывающий особенности переноса частиц в кислороде.

Предположим, что электронная лавина развивается в электрическом поле с постоянной напряженностью $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$. Среда заполнена кислородом с концентрацией N и давлением p . Началом электронной лавины является выброс n_0 электронов в момент времени $t = 0$ из точки $\mathbf{r} = (x, y, z) = (0, 0, 0)$ с нулевыми энергиями. В процессе моделирования отслеживается траектория движения каждого электрона до достижения времени t_{max} . Это делается путем расчета изменения координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ через равные достаточно малые промежутки времени Δt . В конце временного промежутка определяется произойдет ли столкновение с молекулой кислорода согласно вероятности $P = 1 - \exp(-\sigma_{tot}(T_i)N\Delta l)$ или нет. Здесь $\sigma_{tot}(T_i)$ – полное микроскопическое сечение неупругих столкновений, Δl – длина свободного пробега. Если столкновение произошло, то разыгрывается тип взаимодействия в соответствии с сечениями упругого рассеяния, возбуждения, ионизации и поглощения. Для этого используются сечения семнадцати типов взаимодействий для кислорода [2].

При упругом рассеянии энергия частицы не меняется. Для всех видов неупругих столкновений направление движения разыгрывается также, как и для упругого рассеяния, а энергия уменьшается на величину соответствующего порога.

Для проведения численного эксперимента было выбрано два варианта моделирования.

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-01-00356 и № 18-01-00599.

Модель 1 предполагает вычисление косинуса угла рассеяния по формуле [3]:

$$\mu = \cos\theta = 1 - \frac{2\alpha(1-\xi(T))}{1+\xi(T)(1-2\alpha)}, \quad \xi(T) = \frac{0.065T + 0.26\sqrt{T}}{1 + 0.05T + 0.2\sqrt{T}} - \frac{12\sqrt{T}}{1+40\sqrt{T}}. \quad (1)$$

Здесь T – энергия налетающего электрона, α – равномерно распределенное на отрезке $[0,1]$ случайное число.

В данном случае легко получить угол рассеяния для электрона любой энергии.

Модель 2. В наиболее востребованной области энергий (менее 200 эВ) были использованы экспериментальные данные [4], которые демонстрируют нетривиальный вид плотности распределения косинуса угла рассеяния μ , не соответствующий известным теоретическим формулам. Для энергий свыше 200 эВ вычисление μ проводилось по формуле (1). При этом моделирование косинуса угла рассеяния по экспериментальным данным осуществлялось модифицированным методом дискретной суперпозиции.

Экспериментальные данные, как правило, дают значения плотности распределения $f(u, T_j)$ только в некоторых точках $u \in \{u_i\}$. Для построения непрерывной функции было использовано линейное восполнение. Моделирование случайной величины по такой кусочно-линейной плотности возможно методом обратной функции распределения.

В ходе моделирования, в определенные моменты времени t_i строятся оценки следующих функционалов: число частиц $n(t_i)$, скорость центра масс $V_c(t_i) = \langle z \rangle / t_i$, средняя кинетическая энергия $\langle T \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n T_k(t_i) / n(t_i), \text{ положение центра масс } \mathbf{r}_c(t_i) = (\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle) \quad \langle x \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k(t_i) / n(t_i), \quad \langle y \rangle = \sum_{k=1}^n y_k(t_i) / n(t_i), \quad \langle z \rangle = \sum_{k=1}^n z_k(t_i) / n(t_i), \text{ средняя} \end{aligned}$$

скорость $\langle V_z \rangle = \sum_{k=1}^n V_{z,k}(t_i) / n(t_i)$. Здесь суммирование ведется по всем

частицам. Одновременно с функционалами вычисляются соответствующие среднеквадратические погрешности.

Расчеты всех функционалов проводились для множества значений $E/p \in \{50, 100, 150, 200, 250, 300, 350\}$. Причем в **Модели 2** при минимальном отношении напряженности электрического поля к давлению газа, электронная лавина не развивается, поэтому данные для этого значения отсутствуют на графиках.

На **Рис. 1** представлены результаты расчета средней кинетической энергии в зависимости от отношения напряженности электрического поля E_z к давлению газа p . На графике кроме значений, полученных в результате проведения численного эксперимента (**Модель 1** и

Модель 2), приведены так же значения из [5] (Schlumbohm) и данные, рассчитанные алгоритмом BOLSIG+ [6].

На **Рис. 2** представлены результаты расчета скорости центра масс и средней скорости электронов при $t_i = t_{max}$ с использованием **Модели 1** (M1) и **Модели 2** (M2). Из графика видно, что значения средней скорости частиц для **Модели 2** лучше всего согласуются с экспериментальными данными, описанными в [5] и [7] (Lisovskiy).

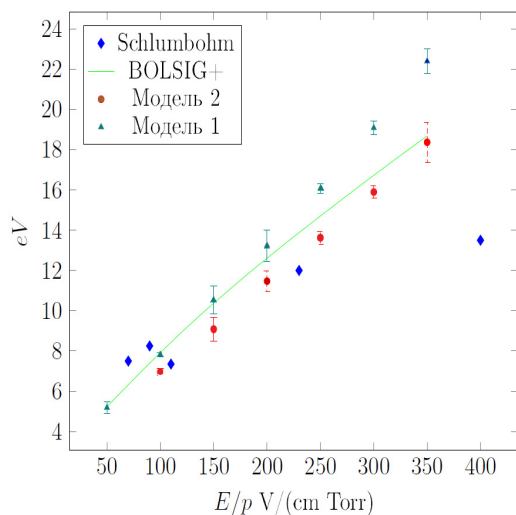


Рис. 1. Средняя кинетическая энергия частиц

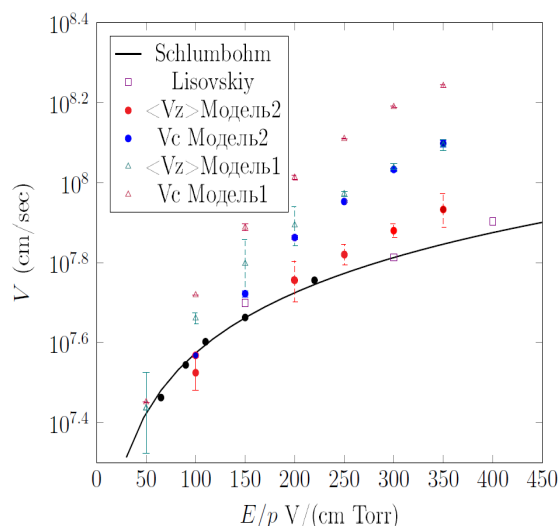


Рис. 2. Средняя скорость центра масс и средняя скорость электронов

С помощью непрерывной кусочно-линейной модификации гистограммы – полигона частот плотности частиц – вычисляются диффузионные радиусы R_T и R_L . Диффузионный радиус совпадает с расстоянием от точки максимума распределения частиц до точки, в которой эта функция уменьшается в $e = 2,71898...$ раз. С помощью формул $R_T = \sqrt{4D_T t}$ и $R_L = \sqrt{4D_L t}$ вычисляются коэффициенты продольной D_L и поперечной диффузии D_T .

Зная число частиц в начальный момент времени n_0 и в i -тые моменты времени $\{n(t_i)\}$, можно вычислить частоту ионизации v_{ion} , которая отражает экспоненциальную зависимость числа частиц от времени: $n(t_i) = n_0 \exp(v_{ion} t_i)$. Еще одним важным функционалом является коэффициент ударной ионизации α_{ion} , который характеризует экспоненциальную зависимость числа частиц в лавине от пройденного ею расстояния d : $n_d = n_0 \exp(\alpha_{ion} d)$. На **Рис. 3** приведен результат расчета продольной и поперечной диффузий, для сравнения приведены данные из [5] (Schlumbohm). На **Рис. 4** показаны полученные в результате численных экспериментов, коэффициенты ударной ионизации. В результате работы исходный алгоритм был модифицирован, подобраны сечения взаимодействия и индикатриса рассеяния для моделирования взаимодействия электронов с молекулами кислорода.

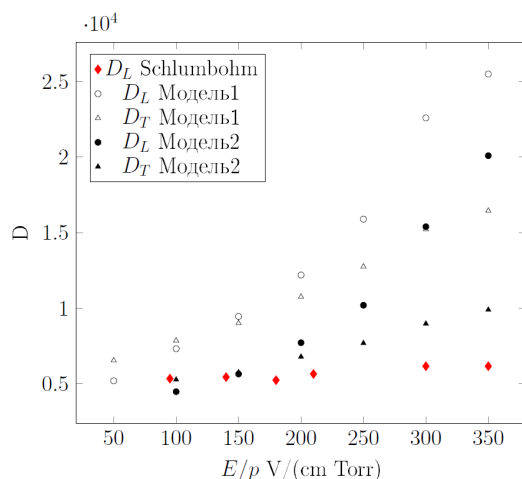


Рис. 3. Коэффициенты поперечной D_T и продольной D_L диффузий

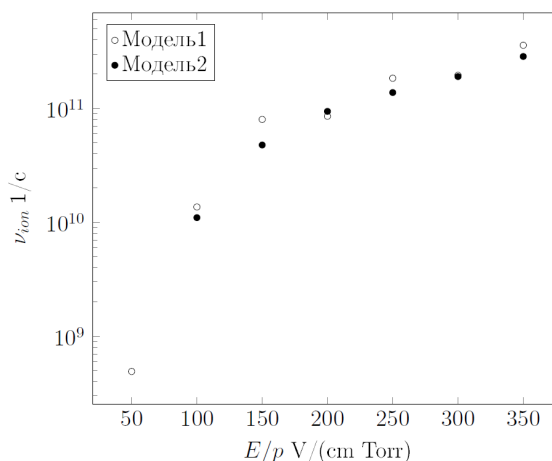


Рис. 4. Частота ионизации ν_{ion}

Расчеты показали, что дифференциальные сечения **Модели 2** лучше описывают рассеяние электронов на молекулах кислорода, и именно такой набор сечений можно рекомендовать для моделирования развития электронной лавины в кислороде и газовых смесях с ним.

Расчеты проводились в Сибирском Суперкомпьютерном центре СО РАН с применением пакета программ PARMONC [8] для их распараллеливания.

Библиографический список

1. Лотова, Г. З. Параллельная реализация метода Монте-Карло для моделирования развития электронных лавин в газе / Г. З. Лотова, М. А. Марченко, Г. А. Михайлов, С. В. Рогазинский, В. В. Рыжов, С. А. Ухинов, В. А. Шкляев // Известия высших учебных заведений. – 2014. – Т. 57, № 2–3. – С. 182–185.
2. Itikawa, Y. Cross Sections for Electron Collisions with Oxygen Molecules / Y. Itikawa // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 2009. – Vol. 38, I 1. – Pp.1–20.
3. Okhrimovskyy, A. Electron anisotropic scattering in gases: A formula for Monte Carlo simulation / A. Okhrimovskyy, A. Bogaerts, R. Gijbels // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65. – Pp. 1–4.
4. Shyn, T. V. Angular distribution of electrons elastically scattered from SO_2 : 20 – 200-eV impact energy / T. V. Shyn, W. E. Sharp // Phys. Rev. A. – 1982. – Vol. 26, I.3. – Pp. 1369–1372.
5. Schlumbohm, H. Elektronenlawinen bei hohen E/p /Z. Phys. / H. Schlumbohm. – 1965. – Vol. 182, I. 3. – Pp. 306–316.
6. Hagelaar, G. J. M. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models /G. J. M. Hagelaar, L. C. Pitchford // Plasma Sources Sci. Technol. – 2005. – Vol. 14. – Pp. 722–733.
7. Lisovskiy, V. Electron drift velocity in argon, nitrogen, hydrogen, oxygen and ammonia in strong electric fields determined from rf breakdown curves / V. Lisovskiy, J.-P. Booth, K. Landry et. al. // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2006. – P.39.
8. Marchenko, M. PARMONC - A Software Library for Massively Parallel Stochastic Simulation / M. Marchenko // LNCS. – 2011. – Vol. 6873. – P. 302–315.

ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОГО ГЛИНИСТОГО СЛАНЦА¹

Б. Х. Имомназаров, В. А. Няго^{*}, Х. Х. Имомназаров^{*}, П. В. Коробов^{**}

Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Россия,

^{*}Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия,

^{**}Арктический и Антарктический
научно-исследовательский институт,
г. Санкт-Петербург, Россия,

E-mail: buned11998.07@mail.ru, imom@omzg.sscg.ru

Основной целью математического моделирования пластовых систем «в целом» является расширение представлений о сложных физико-химических процессах в пласте, сопровождающих процесс добычи углеводородов при использовании современных высокотехнологичных методов увеличения нефтеотдачи. Для корректного описания этих процессов требуется согласованный учет влияния термодинамических, химических и других факторов, определяющих характер течения многофазного многокомпонентного флюида в пласте.

Соотношения деформации-напряжений с учетом химических потенциалов

Рассмотрим изоэнтропический случай. В лабораторных условиях это выполняется. Определим свободную энергию Гельмгольца f_0 пористой системы (т.е. скелет + поровой жидкости), связанную с твердой частицей в виде

$$df_0 = d(f - \mu^r m^r) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \sum_{r=1}^R m^r d\mu^r,$$

где химические потенциалы компонентов в растворе запишем в виде [1]:

$$\mu^r = \mu_0^r + RT \ln x^r \gamma^r = \mu_0^r + RT \ln a^r.$$

Здесь μ_0^r – химический потенциал вида r в равновесном состоянии, x^r – частичное молярная доля видов r , γ^r – коэффициент активности и $a^r = x^r \gamma^r$ является активность r -го вида; R – газовая постоянная.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-31-00120).

Для идеального раствора $\gamma^r = 1$. Масса m^r каждого вида в единице объема пористого материала измеряется в молях.

Химический потенциал μ_0^r является функцией давления и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \mu_0^r}{\partial p} = v^r = \frac{1}{\rho^r}.$$

Здесь v^r – объем одного моля вещества.

В силу того, что df_0 есть полный дифференциал. Принимая ε_{ij} и μ^r в качестве независимых переменных, получим

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mu^r} = -\frac{\partial m^r}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial m^r}{\partial \mu^s} = \frac{\partial m^s}{\partial \mu^r}. \quad (2)$$

Таким образом, в этих переменных соотношения деформация-напряжений имеет вид

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - \sum_r D_{ij}^r d\mu^r, \quad (3)$$

$$dm^r = D_{ij}^r d\varepsilon_{ij} + \sum_s A^{rs} d\mu^s, \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (1), чтобы определить перекрестные коэффициенты D_{ij}^r (3) и (4), и где $A^{rs} = A^{sr}$, в силу соотношения (2). Кроме того, можем рассмотреть свободную энергию Гиббса

$$d\left(f - \sum_r \mu^r m^r - \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}\right) = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \sum_{r=1}^R m^r d\mu^r.$$

В силу полного дифференциала, и принимая σ_{ij} и μ^r , как переменных состояния, получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mu^r} = -\frac{\partial m^r}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

и соотношения (2) имеет место, как и раньше.

Следовательно

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + \sum_r Q_{ij}^r d\mu^r, \quad (6)$$

$$dm^r = Q_{ij}^r d\sigma_{ij} + \sum_r B^{rs} d\mu^s. \quad (7)$$

Здесь мы использовали (5), чтобы определить перекрестные коэффициенты Q_{ij}^r в (6) и (7), и где $B^{rs} = B^{sr}$, в силу (3).

Далее будем использовать компоненты тензора напряжений σ_{ij} и химические потенциалы μ^r , в качестве независимых переменных состояния, и воспользуемся соотношениями (9) и (10). При этом входящие в эти соотношения коэффициенты S_{ijkl} , Q_{ij}^r , и B^{rs} определяются из экспериментов. Эксперименты по уплотнению глины в контакте с большим резервуаром были выполнены в работах [2, 3]. В каждом эксперименте состав пластового флюида поддерживался постоянным, а приложенное напряжение варьировались: результаты дают информацию о коэффициентах S_{ijkl} . Химический состав пластового флюида варьировался в пределах одного эксперимента либо изменением раствора CaCl_2 на раствор NaCl , либо путем изменения концентрации соли. Наблюдение степени набухания глин в зависимости от концентрации соли могут также быть выполнены на микроскопическом уровне, с использованием рентгеновской дифракции для измерения расстояния между частицами глины (см., например, [4, 5]). Следовательно, эти информации позволяют определить перекрестные коэффициенты Q_{ij}^r .

Однокомпонентная поровая жидкость.

В однокомпонентной поровой жидкости, $a^r = x^r = \gamma^r = 1$, и, следовательно, согласно формуле (1), $\mu^1 = \frac{dp}{d\rho^1}$.

Отклик сланца будет зависеть только от порового давления p жидкости в резервуаре и приложенного напряжения σ_{ij} . Если система является изотропным, соотношения (6) и (7) упрощаются и принимают вид

$$d\epsilon_{ij} = S_1 d\sigma_{ij} + \delta_{ij} S_2 d\sigma_{kk} + \delta_{ij} \sum_r Q^r d\mu^r, \quad (8)$$

$$dm^r = Q^r d\sigma_{kk} + \sum_r B^{rs} d\mu^s. \quad (9)$$

и мы видим, что для моделирования необходимы четыре материальных коэффициента. В изотропной пористой среде, соотношения (8) и (9) можно записать в виде [6]

$$2\mu\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij},$$

$$m - m_0 = \frac{3\rho_0(v_u - v)}{2\mu B(1 + v)(1 + v_u)} \left[\sigma_{kk} + \frac{3}{B} p \right]$$

Здесь были выбраны четыре материальных коэффициента: модуль сдвига μ , насыщенные и ненасыщенные коэффициенты Пуассона v и v_u , и параметр Скемптона B , который связывает ненасыщенный отклик порового давления и приложенные напряжения.

Уравнения движения

Если отклонения от термодинамического равновесия малы, то массовый поток $\mathbf{q}^r$ r -го вида может быть представлено в виде

$$q_i^r = - \sum_s L_{ij}^{rs} \nabla_j \mu^s.$$

Здесь $L_{ij}^{rs} = L_{ji}^{sr}$ согласно принципу Онсагера.

Так как мы рассматриваем однокомпонентные поровые жидкости, насыщаемая пористая среда является изотропной и для таких сред в гидравлическом случае справедлив закон Дарси [7, 8]:

$$\mathbf{q}^1 = - \frac{1}{\chi \rho \rho^1} \nabla p.$$

Здесь ρ^1 – парциальная плотность поровой жидкости (воды), ρ – общая плотность континуума, χ – коэффициент межкомпонентного трения.

Справедлив закон сохранения массы для каждого вида

$$\frac{\partial m^r}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^r = 0,$$

и следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q_{ij}^r d\sigma_{ij} + \sum_r B^{rs} d\mu^s \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_s L_{ij}^{rs} \nabla_j \mu^s \right) = 0.$$

Электронейтральность подразумевает, что не должно быть никаких наращиваний изменения в любой точке. Если z^r – валентность r -го вида, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_r q_i^r z^r \right) = 0.$$

Потенциалы течений будут созданы для того, чтобы сохранить электронейтральность. Удобно ввести потенциал течения Ψ в химиче-

ские потенциалы r -го вида следующим образом $\mu^r = \hat{\mu}^r + z^r F \Psi$, где $\hat{\mu}^r$ – химический потенциал (r -го вида), соответствующий локальной концентрации ионов, воды и глины. Ионные потоки принимают вид

$$q_i^r = - \sum_s L_{ij}^{rs} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\mu}^s + z^s F \Psi)$$

и потенциал течения Ψ является решением уравнения Пуассона следующего вида

$$\sum_r z^r \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_s L_{ij}^{rs} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\mu}^s + z^s F \Psi) \right] = 0.$$

с нулевым граничным условием Дирихле для контакта с высокой проводимостью жидкости или пористой породы. Если заданы потоки, тогда выполняется условия непротекания и непроводящей границы.

Если ион адсорбируется на стенках пор, он будет путешествовать только медленно, через скалы, и соответствующие коэффициенты переноса L_{ij}^{rs} будут малы. Если химические эффекты пренебрежимо малы (например, если пористость в пределах сланца является большим, из-за оттока), то будет доминировать конвективное течение, с дополнительной диффузией ионов по отношению к объемной жидкости.

Заключение

Таким образом, показано, что деформация ϵ в упругодеформируемой пористой среды является функцией напряжения σ и порового давления p . Дополнительные осмотические эффекты присутствуют в некоторых породах, например, сланцах. Следовательно, эти эффекты в свою очередь модифицирует термодинамику, рассматриваемой системы. А именно в выражение внутренней энергии появляется дополнительное слагаемое, обусловленное химическими потенциалами μ^r из всех химических видов в поровой жидкости. Вследствие этого в соотношениях деформации-напряжений появляется слагаемое обусловленными химическими потенциалами.

Библиографический список

1. Sherwood, J. D. Biot poroelasticity of a chemically active shale / J. D. Sherwood // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1993. – Vol. 440. – Pp. 365–377.
2. Mesri, G. Consolidation characteristics of Montmorillonite /G. Mesri, R. E. Olson // Geotechnique. – 1971. – Vol. 21. – Pp. 341–352.
3. Denis, J. H. Compaction and swelling of Ca-smectite in water and in CaCl_2 solutions: water activity measurements and matrix resistance to compaction / J. H. Denis // Clays Clay Miner. – 1991. – Vol. 39. – Pp. 35–42.

4. Slade, P. G. Crystalline swelling of smectite samples in concentrated NaCl solutions in relation to layer charge / P. G. Slade, J. P. Quirck, K. Norrish // *Clays Clay Miner.* – 1991. – Vol. 39. – Pp. 234–238.

5. Denis, J. H. Influence of Potassium concentration on the swelling and compaction of mixed (Na, K) ion-exchanged montmorillonite / J. H. Denis, M. J. Keall, P. L. Hall, G. H. Meeten // *Clay Miner.* – 1991. – Vol. 26. – Pp. 255–268.

6. Имомназаров, Х. Х. Аналог формул К. Терцаги и А. Скемптона для пористых сред, описываемыми тремя упругими параметрами // *Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2016 : XI Междунар. науч. конгр. (18–22 апреля 2016 г.). – Новосибирск : Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология : междунар. науч. конф., 2016. – Т. 1. – С. 178–182.*

7. Blokhin, A. M. Mathematical modelling in the theory of multivelocitity continuum / A. M. Blokhin, V. N. Dorovsky. – New York : Nova Science, 1995.

8. Жабборов, Н. М. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред / Н. М. Жабборов, Х. Х. Имомназаров. – Ташкент, 2012. – 212 с.

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА КАНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ GSM

Д. В. Крюкова, Ю. Ф. Захарова, О. В. Захаров*

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

ПАО «Мобильные ТелеСистемы» (МТС),

г. Пенза, Россия

E-mail: olegzakharov@rambler.ru

Мобильный телефон – одно из самых необходимых устройств в современном мире. Несмотря на обилие функций, встроенных в современные мобильные устройства (смартфоны), их основной функцией остается передача речи. Технологии мобильной телекоммуникации сейчас пользуются беспрецедентным мировым успехом. Все чаще нам приходится сталкиваться с функциями, которые предполагают использование различных системы передачи данных. Одна из них – это передача данных через голосовые каналы мобильных систем связи, таких как GSM (Global System for Mobile Communications), CDMA (Code Multiple Access) и UMTS (Universal Mobile Telecommunication System).

Существует множество областей, в которых передача данных по голосовому каналу GSM обладает наибольшей эффективностью, по сравнению с другими типами передачи данных с мобильных устройств.

Одним из таких является система осуществления мобильных транзакций в системах mPOS. Мобильный POS-терминал или mPOS (mobile Point Of Sale — мобильная точка продажи) — компактное устройство, представляющее собой подключенный к смартфону или планшетному компьютеру торговый терминал, позволяющий проводить безналичный расчет с помощью банковской карты. Основные преимущества — компактность, низкая стоимость и возможность осуществления платежей в любой точке, где есть доступ в Интернет или сотовая связь. Данные системы могут использоваться во многих сферах обслуживания: услуги такси, рестораны, кинотеатры и т.п. Распространение данной платежной систем обусловлено рядом преимуществ передачи данных через голосовой канал GSM системы mPOS.

Использование голосовых каналов GSM также возможно в системах охраны и пожарной сигнализации. Использование GSM-канала позволяет избежать недостатков обычных проводных телефонных линий: недостаточно устойчивую работу городских телефонных линий, их низкую физическую защищенность, отсутствие возможности охраны нетелефонизированных объектов (дачи, коттеджи и т.д.).

Первоначально беспроводные системы не получили широкого распространения из-за низкой надежности. Но в настоящее время появился широкий спектр различных дополнительных устройств, активно используются новые поколения беспроводных систем связи.

Таким образом, независимо от качества и новинки существующей инфраструктуры GSM, ее использование весьма эффективно во многих областях науки и техники. Однако для ее успешного внедрения необходимо рассмотреть ряд возможных трудностей в реализации; для этого необходимо исследовать работу стандарта GSM и рассмотреть возможные типы модуляции данных для выявления наиболее эффективного способа работы системы.

Для увеличения числа свободных каналов связи, согласно стандарту GSM, используется «прерываемая передача» речевого сигнала. Она предусматривает, что за все время разговора человек говорит менее 40% времени. В телефонах стандарта GSM во время любого разговора в каждом телефонном аппарате работает специальный блок: детектор активности речи (Voice Activity Detector, VAD). В паузах между речевыми кадрами этот блок (детектор) выключает передачу данных от аппарата абонента, а для того, чтобы пустые паузы не создавали у абонентов слухового дискомфорта, блок генерирует специальный «комфортный шум». Спектральный состав этого шума близок к белому, а аудиторное восприятие отдаленно напоминает шум льющейся воды. Таким образом, каждая фонограмма в GSM канале является «смонтированной» из реплик абонентов, между которыми производится вставка искусственного сигнала «комфортного шума». Весь смонтированный сигнал, то есть, и места стыков — монтажных переходов между передаваемым речевым

сигналом и синтезируемым шумом сглаживаются специальным «пост фильтром».

Целью данной работы является исследование работы алгоритма VAD, включающая в себя оценку допустимых значений параметров срабатывания детектора: оптимальной длительности пауз между речевыми сигналами, реакция детектора на фазовое и временное смещение сигнала, оценка искажения сигнала при различной длине пауз.

При решении поставленной задачи рассматривался стандартный алгоритм VAD [1] для составления модели исследования различных типов речевых сигналов или сигналов, сходных с речевыми (например, сигналы сотового текстового модема (CTM)).

Алгоритм VAD

Основной функцией алгоритма VAD является обнаружение кадров длиной 20 мс, которые подлежат передаче (речь, музыка, информационные тоны). На рис. 1. представлена блочная диаграмма алгоритма VAD. Логическое решение об идентификации речевого кадра принимается исходя из параметров речевого кодера. Здесь $s(i)$ – выборки входящего кадра, $T_{op}[n]$ – массив задержек с незамкнутым циклом, t_0, t_1 – значения автокорреляции, полученные при анализе интенсивности входящего сигнала.

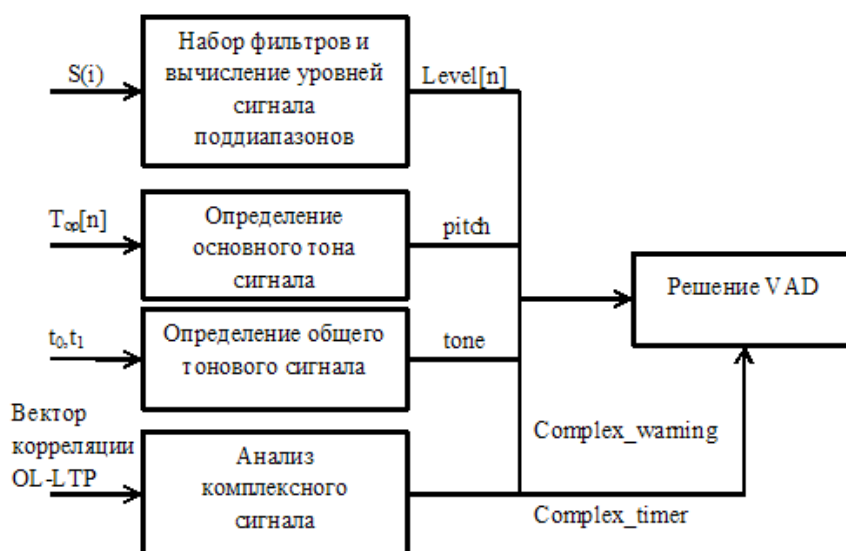


Рис. 1. Упрощенная блочная диаграмма алгоритма VAD

Таким образом, решение VAD применяется относительно значений параметров уровня подвыборок входящего кадра, значения основного тона (pitch), оценки общего тона и параметров комплексного сигнала (подробнее [1]).

Исследования работы детектора активности речи проводились на модели стандартного алгоритма. В качестве основных параметров детек-

тора для принятия решения VAD о наличии речевого или речеподобного сигнала рассматривались: индикатор основного тона (*pitch*), индикатор общего тона (*tone*), индикаторы наличия и длительности комплексного шума (*complex_warning* и *complex_timer*), уровень подвыборок входящего сигнала *level[n]*. Результат работы детектора активности речи оценивался при различной длительности пауз и при изменении фаз сигнала со смещением во времени.

Для анализа работы VAD был выбран аудиофайл, сотового текстового модема (Cellular Text Modem, CTM) длиной 17 сек (рис. 2).

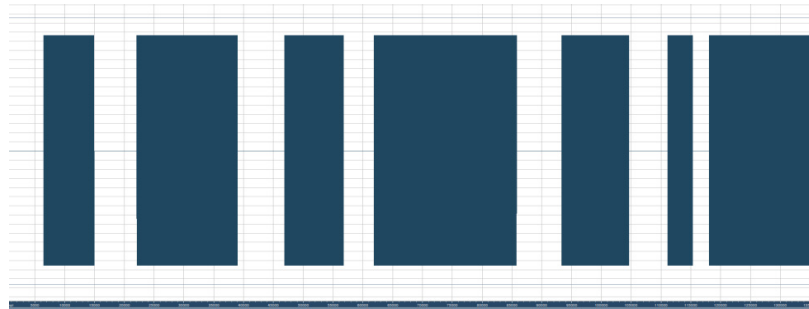


Рис. 2. Графическая интерпретация сигнала CTM в программе Cool Edit Pro

Согласно алгоритму, *VAD_decision* принимает «1», если принято решение о наличии речеподобного сигнала и «0», если речеподобного сигнала не обнаружено. Детектор активности речи корректно определяет интервалы наличия речеподобного сигнала (рис. 3).

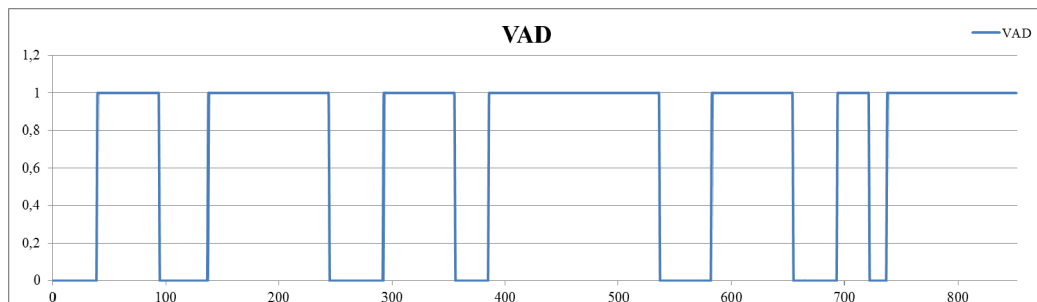


Рис. 3. Решение детектора активности речи для исходного файла

При изменении размера пауз между блоками сигнала до 10-20 мс (рис. 4), получим следующие результаты работы детектора активности речи (рис. 5).

Таким образом, в ходе исследования работы алгоритма VAD на примере сигнала CTM было оценено влияние длительности пауз между речевыми сигналами и влияние временного смещения сигнала на результат работы детектора активности речи в условиях хорошего канала связи (AMR122). Исходя из результатов, можно сделать вывод о том, что длина пауз между речевыми сигналами значительно влияет на результат ра-

боты VAD. В случае длины пауз не превышающей 40 мс, работа детектора приводит к незначительным искажениям, однако если длина пауз превышает 40 мс, работа VAD может привести к значительным искажениям информационных сигналов за счет замены областей неречевых сигналов комфортным шумом.

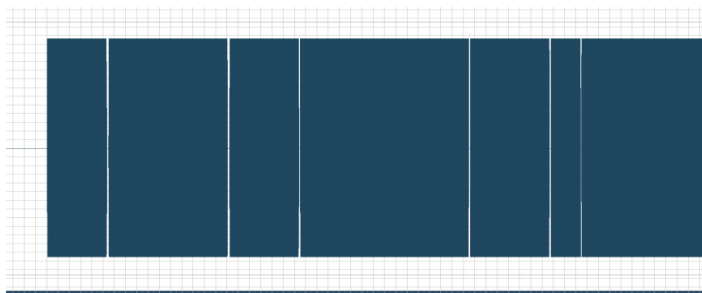


Рис. 4. Сигнал СТМ с измененным размером пауз между блоками

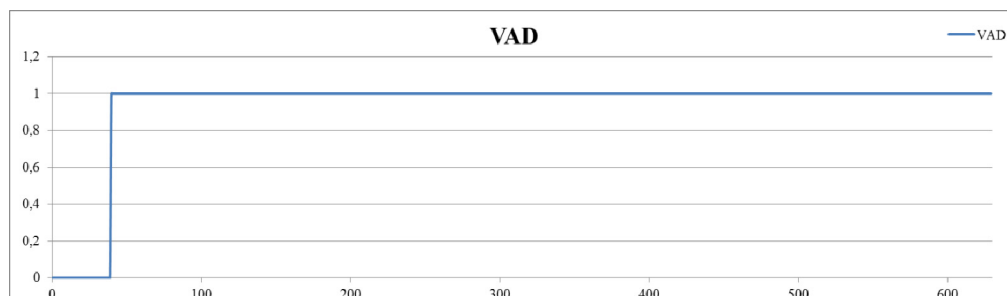


Рис. 5. Решение детектора активности речи для измененного файла

Смещение речевого сигнала на 10 мс., 20 мс. относительно исходного, не влияет на работу детектора активности речи. Смещение речевого сигнала на 5 мс., 15 мс. начинают оказывать влияние на работу детектора, вследствие чего возможно увеличение искажений информационных сигналов.

Библиографический список

1. 3GPP TS 26.094 V10.0.0 (2011-03) // Technical Specification Group Services and System Aspects; Mandatory speech codec speech processing functions; Adaptive Multi-Rate (AMR) speech codec; Voice Activity Detector (VAD) (Release 10) // 2011, 3GPP Organizational Partners (ARIB, ATIS, CCSA, ETSI, TTA, TTC).
2. Аврамчук, А. И. Применение GSM-канала в системах охраны / А. И. Аврамчук. – Воронеж. ин-т МВД России. – Ч. 1. – URL: <http://videonnabl.ucoz.ru>
3. Mezgec, Z. Implementation of PCCD-OFDM-ASK Robust Data Transmission over GSM Speech Channel / Z. Mezgec, A. Showdhury, B. Kotnik // INFORMATICA. – 2009. – Vol. 20. – N 1. – Pp.51–78.
4. Прокис, Дж. Цифровая связь / Дж. Прокис. – М. : Радио и связь, 2000.

МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ШКАЛ

П. П. Макарычев

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

E-mail: makpp@yandex.ru

Решающее правило упорядочения многокритериальных альтернатив формируется на основе предпочтения лица принимающего решения (ЛПР). Количество альтернатив, как правило, достаточно велико, и альтернативы имеют оценки, полученные с использованием качественных измерительных шкал [1]. Формально эта задача может быть представлена следующим образом. Имеется набор критериев $S = \{A, B, C, D, \dots\}$ для оценки альтернатив из множества $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Оценки по шкале каждого критерия упорядочены от самой лучшей оценки к самой худшей оценки. Для критерия A последовательность оценок имеет вид:

$$A_1, \dots, A_i, \dots, A_{m_a},$$

где m_a — количество меток на шкале критерия A . Многокритериальные оценки всех возможных альтернатив определяют многомерную сетку, каждая точка которой соответствует одному из возможных сочетаний оценок:

$$A_i, B_j, C_k, D_l, \dots,$$

где $i \in \overline{1, m_a}$, $j \in \overline{1, m_b}$, $k \in \overline{1, m_c}$, $l \in \overline{1, m_d}$.

Постановка задачи. Модель многокритериального анализа создается с целью выявления и формализации предпочтений ЛПР относительно выбора наилучшей альтернативы. При этом модель измерения качества должна отвечать совокупности требований:

- быть логически непротиворечивой;
- отражать реальную информацию о решаемой задаче, предоставленную экспертом или ЛПР;
- быть простой и удобной для анализа и использования ЛПР.

При построении модели осуществляется проверка предпочтений ЛПР при формировании качественных оценок анализируемых альтернатив. Проверка направлена на выполнение ЛПР двух правил. Первое правило связано с соблюдением непротиворечивости: в аналогичных ситуациях оценки и результаты сравнения альтернатив ЛПР должны принимать одни и те же значения. Второе правило связано с выполнением свойства транзитивности отношений. При невыполнении свойства тран-

зитивности возникает замкнутый цикл отношений, что исключает построение единой порядковой шкалы измерения качества альтернатив.

По результатам ответов ЛПР (экспертов) на результаты парных сравнений можно построить только для двух выбранных критериев. Аналогично строятся шкалы для остальных пар критериев. Единая шкала измерений строится на основе шкал для всех пар критериев, с использованием которой ЛПР может принимать оптимальные решения. Таким образом, одной из основных проблем построения шкалы измерений является построение шкал с множеством оценок по двум критериям.

Решение задачи

Предположим, что оценки альтернатив осуществляются по двум критериям A, B , имеющим по две метки на шкалах измерений: $A:A_1, A_2$, $B:B_1, B_2$. Существует две опорные ситуации: наилучшая альтернатива A_1, B_1 и наихудшая альтернатива A_2, B_2 (см. рисунок 1,а). Для построения единой измерительной шкалы требуется сравнить две альтернативы A_1, B_2 и A_2, B_1 .

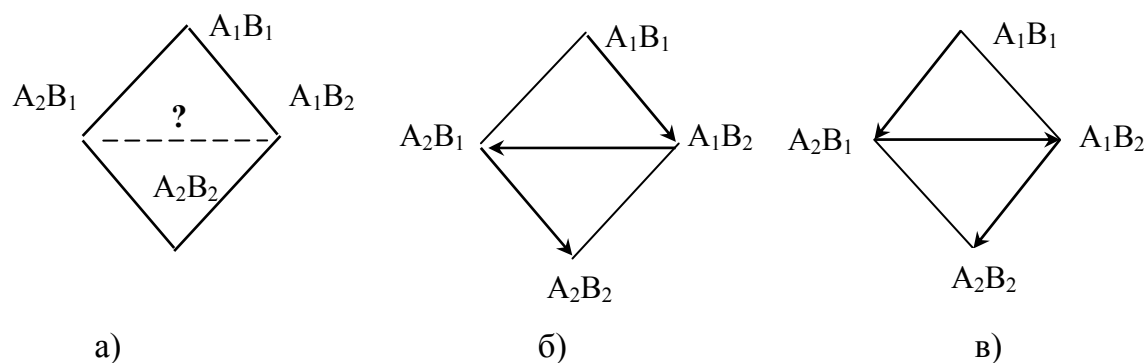


Рис. 1. Построение измерительной шкалы: $A:A_1, A_2$, $B:B_1, B_2$

В результате сравнения из двух альтернатив A_1, B_2 , A_2, B_1 выбирается лучшая альтернатива. Если в качестве лучшей альтернативы выбрана альтернатива A_1, B_2 , то решение имеет вид [2, 3]:

$$A_1B_1 \succ A_1B_2 \succ A_2B_1 \succ A_2B_2 \text{ или } R_a^{1-2} > R_b^{1-2}, \quad (1)$$

где R_a^{1-2} – изменение ценности альтернативы при переходе от одной оценки к другой по шкале критерия A , R_b^{1-2} – изменение ценности альтернативы по шкале критерия B . Свойства шкалы (1) можно зафиксировать графически в виде рисунка 1,б. При лучшей альтернативе A_2, B_1 решение имеет вид:

$$A_1B_1 \succ A_2B_1 \succ A_1B_2 \succ A_2B_2 \text{ или } R_b^{1-2} > R_a^{1-2}. \quad (2)$$

Решение (2) иллюстрируется рис. 1,в.

Рассмотрим вариант с тремя метками на шкале первого критерия $A:A_1, A_2, A_3, B:B_1, B_2$ в предположении, что на первом этапе принято решение $R_a^{1-2} > R_b^{1-2}$. Графические построения, иллюстрирующие возможные решения на втором этапе приведены на рисунке 2. Первый вариант решения: альтернатива A_2, B_2 предпочтительнее альтернативы A_3, B_1 ($A_2, B_2 \succ A_3, B_1$). Принятое решение иллюстрируется рисунком 2,а. Второй вариант решения построения шкалы $A_3, B_1 \succ A_2, B_2$ соответствует рисунку 2,б.

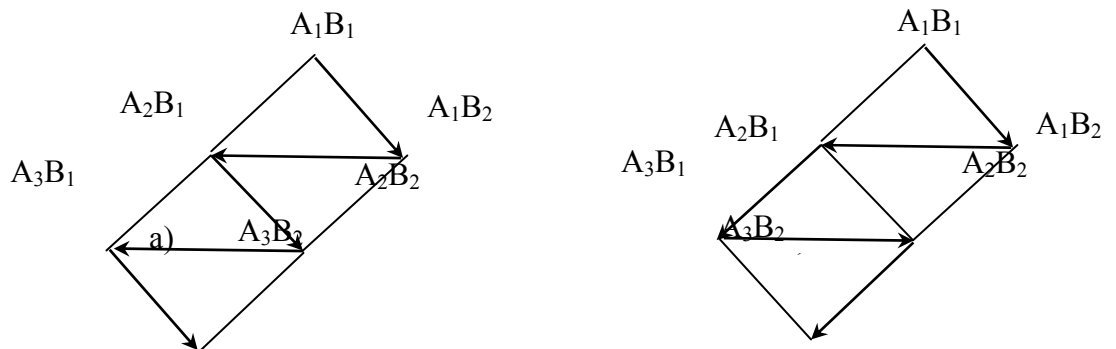


Рис. 2. Построение измерительной шкалы: $A:A_1, A_2, A_3, B:B_1, B_2$

Для первого варианта решения шкала парных сравнений принимает вид:

$$A_1B_1 \succ A_1B_2 \succ A_2B_1 \succ A_2B_2 \succ A_3B_1 \succ A_3B_2. \quad (3)$$

В результате анализа шкалы (3) можно выявить изменения ценностей рассматриваемых альтернатив. Изменение ценности $R_b^{1-2} > R_a^{1-2}$ в шкале (1) сохраняется в шкале (3). Если в качестве точки отсчета выбрать наихудшую альтернативу A_3, B_2 , то можно зафиксировать следующее отношение $\tilde{R}_a^{2-3} > \tilde{R}_b^{1-2}$.

Таким образом, свойства качественной измерительной шкалы (3) характеризуются тремя изменениями ценности альтернатив (отношениями):

$$R_a^{1-2} > R_b^{1-2}, \tilde{R}_a^{2-3} > \tilde{R}_b^{1-2}, \tilde{R}_a^{1-3} > \tilde{R}_a^{2-3}$$

Для второго варианта решения шкала парных сравнений имеет вид:

$$A_1B_1 \succ A_1B_2 \succ A_2B_1 \succ A_3B_1 \succ A_2B_2 \succ A_3B_2. \quad (4)$$

Для шкалы (4) изменения ценностей рассматриваемых альтернатив характеризуются следующими отношениями:

$$R_a^{1-2} > R_b^{1-2}, \tilde{R}_b^{1-2} > \tilde{R}_a^{2-3}, \tilde{R}_a^{1-3} > \tilde{R}_b^{1-2}.$$

Рассмотрим построение единой шкалы измерений при наличии трех меток на оси каждого измерения: $K_1: \{A_1, A_2, A_3\}$, $K_2: \{B_1, B_2, B_3\}$. Предположим, что один из возможных вариантов парных сравнений альтернатив, полученных от ЛПР, графически представлен на рисунке 3.

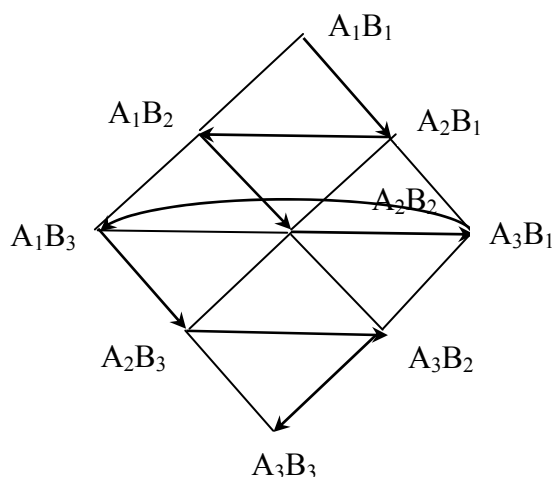


Рис. 3

В соответствии с рисунком 3 шкала качественных измерений альтернатив $A_i, B_j; i=1,2,3; j=1,2,3$. имеет вид:

$$A_1B_1 \succ A_2B_1 \succ A_1B_2 \succ A_2B_2 \succ A_3B_1 \succ A_1B_3 \succ A_2B_3 \succ A_3B_2 \succ A_3B_3. \quad (5)$$

На основе анализа выражения (5) можно зафиксировать следующие отношения интервалов между метками:

$$R_b^{1-3} > R_a^{1-3} > R_b^{1-2} > R_a^{1-2}; \tilde{R}_b^{1-3} > \tilde{R}_a^{1-3} > \tilde{R}_a^{2-3} > \tilde{R}_b^{2-3}.$$

Выводы

Построение единой измерительной шкалы оценки качества альтернатив можно осуществить в три этапа. На первом этапе выявляются отношения между альтернативами (интервалами шкалы) с учетом лучшей опорной ситуации A_1, B_1 . На втором этапе отношения между альтернативами выявляются с учетом наихудшей опорной ситуации A_3, B_3 . Третий этап – построение качественной измерительной шкалы в целом.

Библиографический список

1. Ларичев, О. И. Вербальный анализ решений / О. И. Ларичев ; отв. ред. А. Б. Петровский // Ин-т системного анализа РАН. – М. : Наука, 2006. – 181 с.
2. Макарычев, П. П. Реализация алгоритма классификации состояний аспирантов методом вербального анализа / П. П. Макарычев, Н. А. Попова //

Новые информационные технологии и системы : сб. науч. ст. XII Междунар. науч.-техн. конф., 2015. – С. 128–130.

3. Макарычев, П. П. Построение шкал многокритериального вербального анализа решений / П. П. Макарычев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – 2017. – С. 236–240.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОМЕРЗАНИИ ВЛАЖНОГО ГРУНТА (ЗАДАЧА СТЕФАНА)

Ю. В. Ирышкова, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия,

E-mai: 425699gfgf@mail.ru, math.kudryashova@yandex.ru

Процесс промерзания грунта с физической точки зрения можно интерпретировать как замкнутую систему, в которой с течением времени в зависимости от температуры происходит изменение значения коэффициента теплопроводности λ .

В данной задаче между промерзшей и талой зоной грунта находится граница фазового перехода. Именно из-за того, что происходит процесс перехода вещества из одного состояния в другое, ее и относят к типу задач с подвижной границей (задача Стефана).[1]

Положение межфазной границы с течением времени будет меняться. В данной работе представлено исследование в области выявления функциональной зависимости смещения межфазной границы от времени.

Также графически представлен процесс изменения температуры в грунте с течением времени.

1. Постановка задачи о промерзании грунта

Рассмотрим слой грунта глубиной L и влажностью w .

Введем теплофизические характеристики как для талой, так и для промерзшей зоны грунта: λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности ($Вт / (м \cdot К)$), ρ_1, ρ_2 – плотности грунта ($кг / м^3$), c_1, c_2 – удельные теплоемкости ($Дж / (кг \cdot К)$), Q_f – теплота фазового перехода ($Дж / кг$), $s = f(t)$ – глубина промерзшего слоя.

В начальный момент времени система находится в талом состоянии при некоторой постоянной температуре T_0 . На поверхности грунта в начальный момент времени устанавливается температура T_c . Температуру замерзания будем обозначать – T_ϕ .

Предположим, что перенос тепла в грунте происходит только благодаря теплопроводности.

Рассмотрим одномерную двухфазовую задачу Стефана с граничным условием второго рода на нижней границе (1)-(2).

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}, 0 < x < \xi(t), t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2}, \xi(t) < x < L, t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 0 : T(x) = T_0, 0 \leq x \leq L;$$

$$x = 0 : T(t) = T_c, t > 0; x = L : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0;$$

$$x = \xi(t) : \begin{cases} T_1 = T_2 = T_\phi; \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{d\xi}{dt}; \end{cases} \quad (2)$$

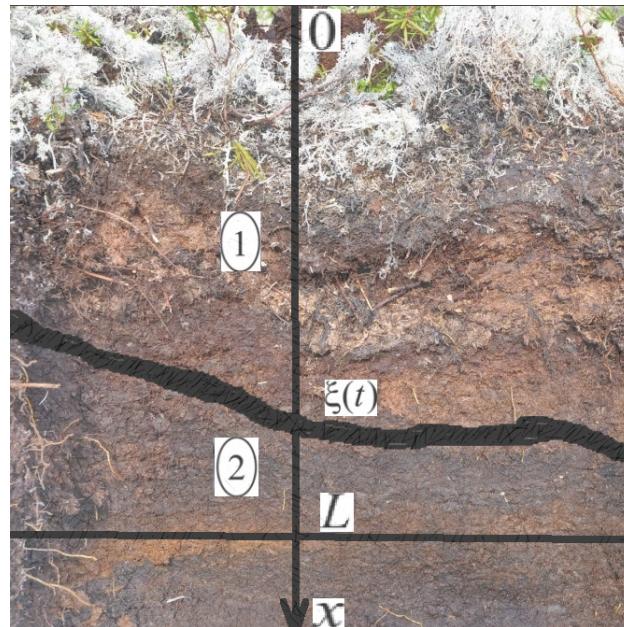


Рис. 1. Схема процесса теплообмена в грунте: Фаза 1 – промерзшая часть грунта $0 \leq x \leq s(t)$; Фаза 2 – талая часть грунта $s(t) \leq x \leq L$

Задачу (1)-(2) будем решать методом ловли фронта в узел пространственной сетки.

Введем равномерную сетку по пространственной переменной

$$x_i = (i-1)h, h = \frac{L}{N-1}, i = \overline{1, N}, x_1 = 0, x_N = L.$$

А по временной переменной будем использовать неравномерную сетку

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, n = \overline{0, M-1}, t_0 = 0, t_M = t_{\text{конечное}}, \tau_{n+1} > 0.$$

Шаг τ_{n+1} выберем таким образом, чтобы за это время граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг по пространственной сетке.

Иными словами, $\frac{d\xi}{dt} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}.$

Разобьем исходную задачу на две подзадачи, каждая из которых будет существовать в своей части грунта. Для решения будем применять метод прогонки.

Задача (1)–(2) в промерзшей части грунта будет аппроксимироваться разностной схемой вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < \xi(t), t > 0; \\ \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{2, i^* - 1}; \\ T_1|_{i=1} &= T_c; \quad T_1|_{i=i^*} = T_3; \end{aligned} \quad (3)$$

где $i = i^*$ – граница фазового перехода.

Для получения приближенного решения исходной задачи в талой части грунта, воспользуемся следующей схемой

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \xi(t) < x < L, t > 0; \\ \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{i^* + 1, N-1}; \\ T_2|_{i=i^*} &= T_3; \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{i=N} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее будем аппроксимировать условия на границе фазового перехода с погрешностью $O(h^2)$. [3]

Разложим искомую функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x = \xi$

$$T_{i^*+1}^{n+1} = T_i^{n+1} + h \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \Big|_{x=\xi}^{n+1};$$

$$T_{i^*-1}^{n+1} = T_i^{n+1} - h \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \Big|_{x=\xi}^{n+1}.$$

Из системы уравнений (1):

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} = \frac{1}{h} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*-1}^{n+1}) + \frac{h}{2a_1\tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_i^n);$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} = \frac{1}{h} (T_{i^*+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \frac{h}{2a_2\tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_i^n). \quad (5)$$

Подставим (5) в граничное условие, получим

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{h} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*-1}^{n+1}) + \frac{h}{2a_1\tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_i^n) \right) -$$

$$- \lambda_2 \left(\frac{1}{h} (T_{i^*+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \frac{h}{2a_2\tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_i^n) \right) = Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{h}{\tau_{n+1}}.$$

Так как $T_{1i^*} = T_{2i^*} = T_3$, то для τ_{n+1}

$$\tau_{n+1} = \frac{a_1 a_2 h^2 Q_\phi (\rho_1 + \rho_2) \omega - h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) (T_3 - T_{i^*}^n)}{2a_1 a_2 \left[\lambda_1 (T_3 - T_{i^*-1}^{n+1}) - \lambda_2 (T_{i^*+1}^{n+1} - T_3) \right]}. \quad (6)$$

Аналогичным способом получим выражение для функции на границе области с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$.

Также, как и в предыдущем случае, воспользуемся разложением искомой функцией в ряд Тейлора.

$$T_{N-1}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=L}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2a} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=L}^{n+1};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} = \frac{T_{N-1}^{n+1} - T_N^{n+1}}{h} + \frac{h}{2a} \frac{T_N^{n+1} - T_N^n}{\tau}. \quad (7)$$

Получим

$$T_N^{n+1} = \frac{2a\tau T_{N-1}^{n+1} + h^2 T_N^n}{2a\tau + h^2}.$$

2. Результаты

Таблица 1

Теплофизические характеристики, используемые в модельной задаче [2]

Название		Количество	Ед. измерения
Глубина слоя грунта L		0,3	м
Влажность w		1	доля
Коэффициент теплопроводности	λ_1	2,3	$Вт / (м \cdot K)$
	λ_2	0,6	
Плотность грунта	ρ_1	917	$кг / м^3$
	ρ_2	1000	
Удельные теплоемкости	c_1	2090	$Дж / (кг \cdot K)$
	c_2	4220	
Теплота фазового перехода Q_ϕ		$3,32 \cdot 10^5$	$Дж / кг$
T_0		293	K
T_c		268	K
T_ϕ		273	K

$M=N=500$ – количество узлов в пространственной и временных сетках.

На рис. 2 представлены функции распределения температуры в зависимости от времени. Следует отметить, что на первом участке (фаза 1, $T < 0$) функции линейны – это соответствует естественным физическим процессам. А на втором участке (фаза 2, $T > 0$) все функции нелинейны – это обусловлено наличием граничного условия второго рода на нижней границе.

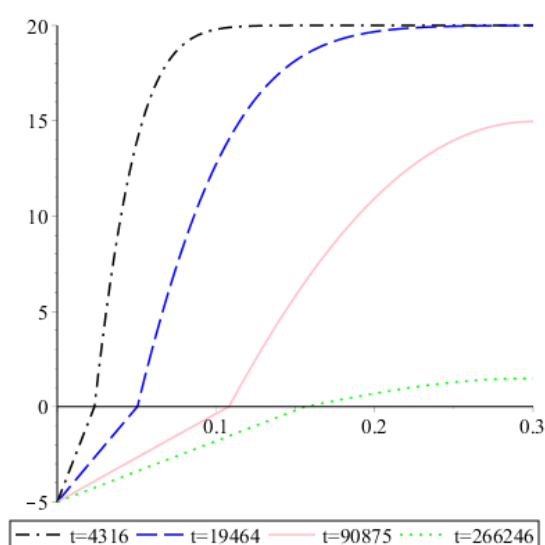


Рис. 2. Распределение температуры (градусы) в зависимости от глубины грунта (t в секундах)

На рис. 3 представлен график движения границы фазового перехода с течением времени.

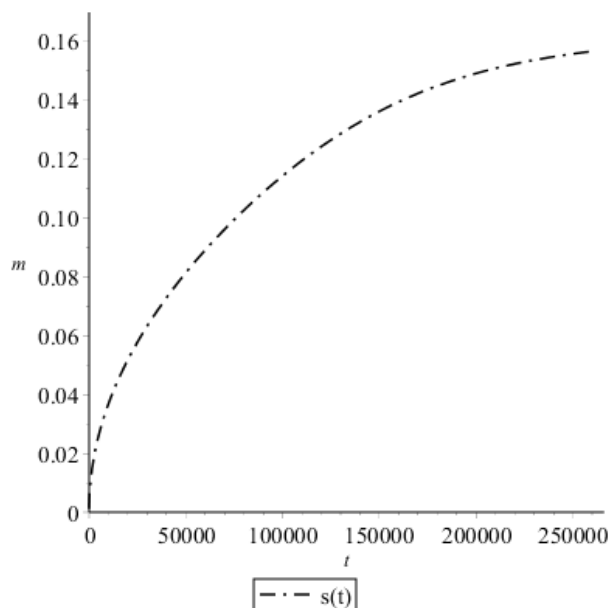


Рис. 3. Функция изменения положения границы $s(t)$

Как видно из графика, зависимость нелинейна. Скорость движения границы замедляется с течением времени.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. К. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Бородин, С. Л. Численные методы решения задачи Стефана / С. Л. Бородин. – Вестник ТюмГУ. Физ.-мат. мод.. Нефть, газ, энергетика, 2015 – 175 с.
3. Кузнецов, Г. В. Разностные методы решения задач теплопроводности : учеб. пособие / Г. В. Кузнецов, М. А. Шеремет – Томск : Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.

АДАПТИВНЫЙ ЭКВАЛАЙЗЕР

В. А. Засов

Самарский государственный университет путей сообщения
г. Самара, Россия
E-mail: vzasov@mail.ru

Эквалайзеры являются важным элементами информационных и измерительных систем позволяющими увеличить пропускную способность каналов связи за счет коррекции неравномерности их частотных

характеристик и снижения отрицательного влияния эффекта межсимвольной интерференции, увеличить точность измерения сигналов в системах обработки информации.

Классический эквалайзер имеет два входа и один выход. На первый вход эквалайзера поступает подлежащий обработке принимаемый входной сигнал $\xi_{\text{вх1}}(i)$, искажённый измерительным преобразователем или каналом связи. Для настройки эквалайзера на его второй вход поступает известный обучающий сигнал $\xi_{\text{вх2}}(i)$. Восстановленный сигнал $\xi_{\text{вых}}(i)$, искажающее влияние в котором канала связи устранено, выдается на выход устройства [1, 2].

Недостатком известного устройства является большая погрешность $\sigma_{\text{в}}^2$ восстановления (коррекции) сигнала, определяемая (1):

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_{\text{вых}}(i) - \xi_{\text{вх1}}(i))^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_{\text{вх1}}(i) * q(i) - \xi_{\text{вх1}}(i))^2 \quad (1)$$

где $\xi_{\text{вых}}(i) = \xi_{\text{вх1}}(i) * q(i) \approx \xi_{\text{вх2}}(i)$, $q(i)$ - весовые коэффициенты корректирующего (перестраиваемого) фильтра, $i = 0, \dots, M-1$, M - количество дискретных отсчётов сигналов. Восстановленный эквалайзером сигнал $\xi_{\text{вых}}(i)$ должен быть равен сигналу $\xi_{\text{вх2}}(i)$ поступающему в режиме восстановления на вход корректируемого преобразователя информации с импульсной переходной характеристикой $h_{\text{кан}}(i)$.

Большая погрешность восстановления $\sigma_{\text{в}}^2$ возникает при эквалайзинге каналов с большой неравномерностью амплитудно-частотной характеристики (АЧХ).

Погрешность восстановления $\sigma_{\text{в}}^2$ может быть представлена в виде суммы двух составляющих $\sigma_{\text{в}}^2 = \sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{метод}}^2$, где $\sigma_{\text{случ}}^2$ - случайная составляющая погрешности (средняя квадратичная ошибка) восстановления, обусловленная шумами и неустойчивостью работы эквалайзера, а $\sigma_{\text{метод}}^2$ - методическая составляющая погрешности восстановления, обусловленная отличием частотного коэффициента передачи $Q(\omega)$ эквалайзера от величины, обратной частотному коэффициенту передачи $H_{\text{кан}}(\omega)$ корректируемого канала, т.е.

$$Q(\omega) \approx \frac{1}{H_{\text{кан}}(\omega)}.$$

При большой неравномерности АЧХ корректируемого канала коэффициенты передачи канала в некоторых полосах частот могут быть

малыми, близкими к нулю, т.е. в десятки раз меньшими значений на других частотах. Очевидно, для коррекции таких «завалов» АЧХ коэффициенты передачи эквалайзера в этих полосах частот должны быть большими, но это приводит к усилению не только сигнала, но шума, который всегда присутствует во входном сигнале $\xi_{\text{вх1}}(i)$. Увеличение уровня шума уменьшает отношение сигнал/шум на выходе эквалайзера и увеличивает случайную составляющую $\sigma_{\text{случ}}^2$ погрешности восстановления сигналов.

В полосах частот, где коэффициенты передачи канала близки к нулю, вследствие большого усиления шумов вычисление весовых коэффициентов перестраиваемого фильтра происходит с большой погрешностью, и даже небольшие изменения параметров канала приводят к резким изменениям (колебаниям) величин вычисленных коэффициентов корректирующего (перестраиваемого) фильтра [2].

Поэтому работа эквалайзера становится неустойчивой, что также увеличивает случайную составляющую $\sigma_{\text{случ}}^2$ погрешности восстановления сигналов.

Уменьшить случайную составляющую $\sigma_{\text{случ}}^2$ погрешности восстановления возможно путем ограничения коэффициентов передачи перестраиваемого фильтра на частотах с большими «завалами» АЧХ канала или путем уменьшения полосы корректируемых частот эквалайзера, но такой подход увеличивает методическую составляющую $\sigma_{\text{метод}}^2$ погрешности восстановления, т.к.

$$Q(\omega) \approx \frac{1}{H_{\text{кан}}(\omega)}.$$

Для устранения этого недостатка предлагается вычисление весов корректирующего (перестраиваемого) фильтра эквалайзера осуществлять с применением методов регуляризации [3].

Среди различных методов регуляризации одним из эффективных по вычислительной сложности является метод использующий результаты анализа параметров устойчивости для расчета параметра регуляризации λ [3,4].

Функциональная схема адаптивного эквалайзера с регуляризацией настройки [5] приведена на рис. 1.

Блок регуляризации и блок стабилизации вычисляют стабилизирующее слагаемое вида $s = \lambda \sum_{i=0}^{N-1} q^2(i)$, которое блоком суммирования

прибавляется к ошибке $\sigma_{\text{е}}^2$ и повышает устойчивость (стабильность) вычислений весовых коэффициентов перестраиваемого фильтра эква-

лайзера и, следовательно, уменьшает погрешность восстановления сигналов.

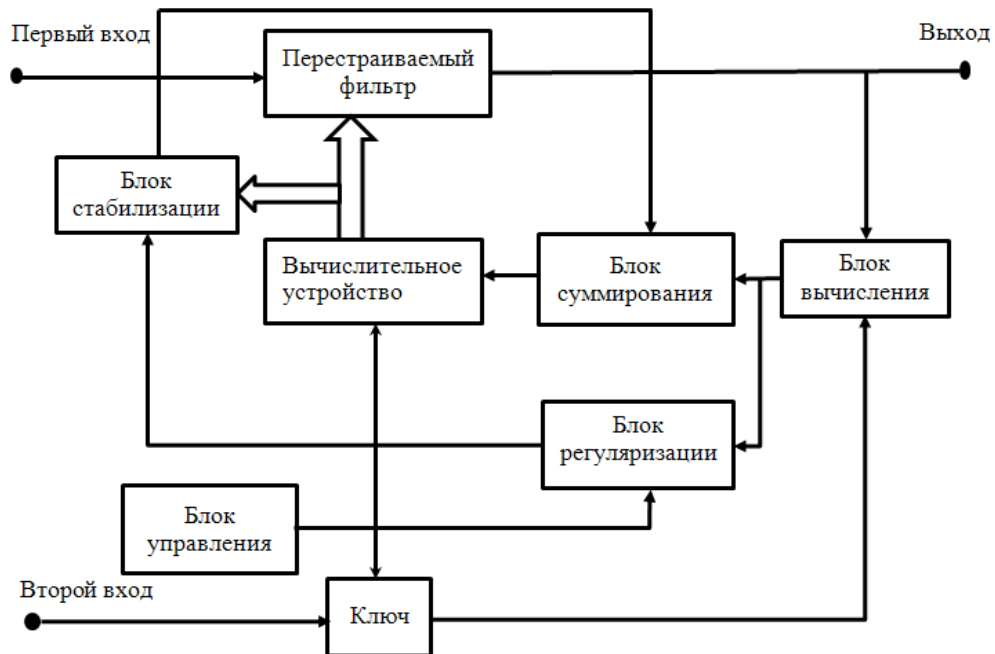


Рис. 1. Функциональная схема адаптивного эквалайзера с регуляризацией настройки

Вычисление λ блоком регуляризации производится в режиме настройки, когда величина погрешности σ_{θ}^2 восстановления превышает некоторый заданный порог δ , т.е. $\sigma_{\theta}^2 \geq \delta$. Вычисление весовых коэффициентов $q(i)$, $i = 0, \dots, N-1$ перестраиваемого фильтра производится на основе критерия минимума средней квадратичной ошибки σ_{λ}^2 .

Вычисления минимума средней квадратичной ошибки σ_{λ}^2

$$\sigma_{\lambda}^2(q) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(\xi_{обуч1}(i) * q(i) - \xi_{обуч2}(i) \right)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} q^2(i)$$

является устойчивым вычислительным процессом за счет использования стабилизирующего слагаемого $s = \lambda \sum_{i=0}^{N-1} q^2(i)$. Это позволяет увеличить достоверность и точность вычислений весовых коэффициентов перестраиваемого фильтра эквалайзера и, следовательно, уменьшить погрешность восстановления сигналов.

При увеличении параметра λ случайная составляющая $\sigma_{случ}^2$ погрешности уменьшается (левый график рис. 2), а методическая состав-

ляющая $\sigma_{метод}^2$ погрешности восстановления увеличивается (правый график рис. 2). Поэтому погрешность восстановления $\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_{случ}^2 + \sigma_{метод}^2$ при некотором значении λ_0 имеет минимум $\sigma_{\epsilon(мин)}^2$.

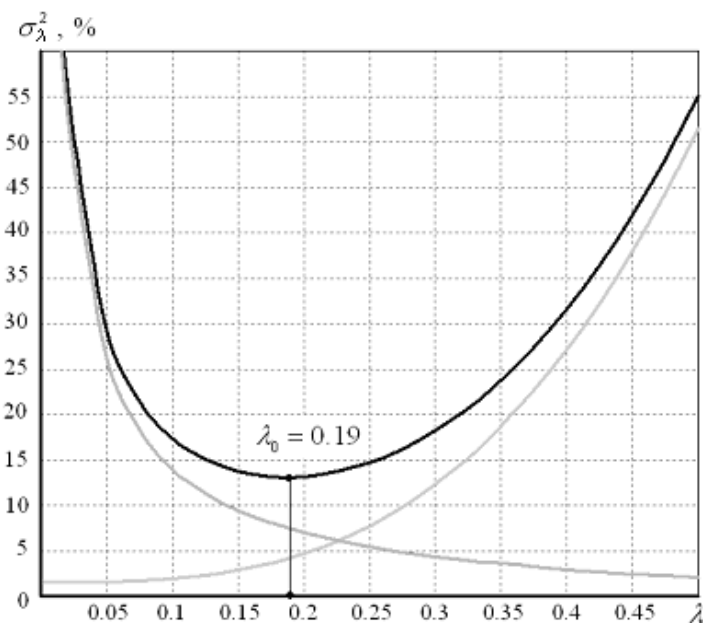


Рис. 2. Изменение случайной $\sigma_{случ}^2$ и методической $\sigma_{метод}^2$ составляющих погрешности σ_{ϵ}^2 восстановления при изменении параметра λ

На рис. 3 приведены примеры моделирования восстановления сигналов эквалайзерами без регуляризации (а) и с регуляризацией (б) в режиме настройки [5].

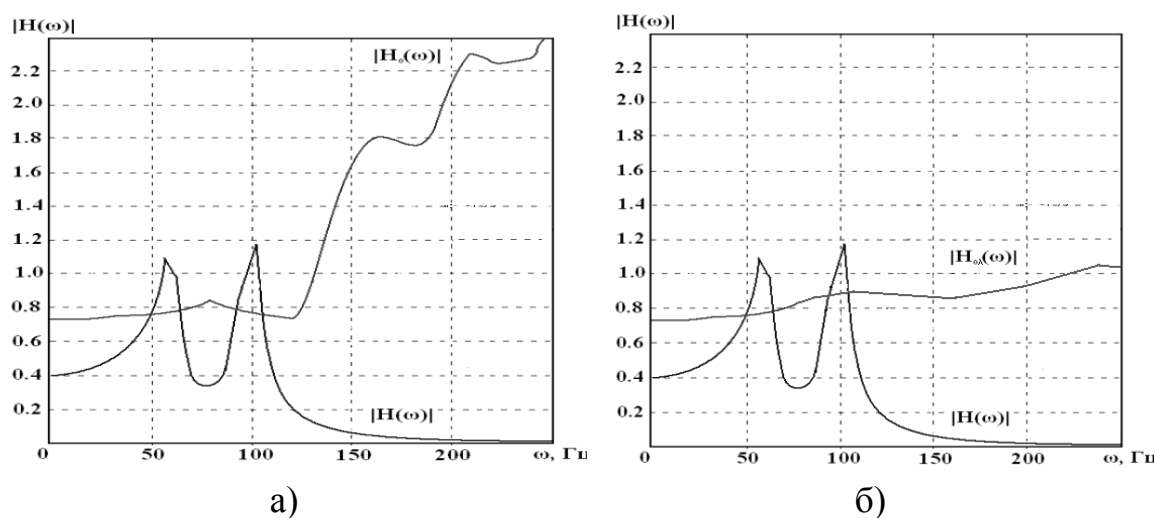


Рис. 3. Результаты восстановления сигналов эквалайзерами без регуляризации (а) и с регуляризацией (б) при настройке

Видно, что неравномерность совокупной АЧХ канал-эквалайзер в области существенного «завала» АЧХ канала (выше 125 Гц) у эквалайзера без регуляризации существенно больше по сравнению с эквалайзером, использующим регуляризирующий алгоритм.

Библиографический список

1. Уидроу, Б. Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С. Стирнз : пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 440 с.
2. Джиган, В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы / В. И. Джиган. – М. : Техносфера, 2013. – 528 с.
3. Засов, В. А. Алгоритм регуляризации решения задачи разделения сигналов, использующий результаты анализа устойчивости // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO-12) : тр. 9-й Междунар. конф. / В. А. Засов. – М. : Изд-во учреждения Росс. акад. наук ИПУ им. В. А. Трапезникова, 2012. – С. 949–962.
4. Засов, В. А. Контроль устойчивости и обеспечение робастности разделения сигналов в условиях вариации параметров объекта / В. А. Засов, Е. Н. Никоноров // Вестник Самарского муниципального института управления: теоретический и научно-методический журнал. – Самара : СММУ. – 2011. – № 1(16). – С.158–168.
5. Засов, В. А. Адаптивный эквалайзер. Патент на полезную модель № 104403 от 24.08.2010 / В. А. Засов, М. А. Тарабардин, Е. Н. Никоноров. – Оpubл. в БИ № 13 от 11.05.2011.

КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В БЛОЧНЫХ АЛГОРИТМАХ ШИФРОВАНИЯ

Г. Ю. Салимов, Ю. Ф. Захарова, М. А. Петрук*

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

*Пензенский научно-исследовательский
электротехнический институт, г. Пенза, Россия

E-mail: olegzakharov@rambler.ru

Криптография – это наука о защите электронных документов от несанкционированного прочтения.

Электронная цифровая подпись – некоторая дополнительная информация, соответствующая данному электронному документу (сообщению), которая могла быть сформирована только владельцем некоторого секрета – закрытого ключа и которая позволяет с использованием специального алгоритма установить факт соответствия подписи закрытому ключу подписывающего. Под электронной цифровой подписью (ЭЦП) понимается также криптографическая система (совокупность ал-

горитмов и правил), позволяющая подписывать цифровые сообщения и проверять правильность формируемых цифровых подписей.

Для формирования цифровой подписи документа обычно создается так называемый дайджест сообщения (message digest), который представляет собой свертку исходного сообщения с помощью специальной хэш-функции (англ. hash – мелко измельчать и перемешивать).

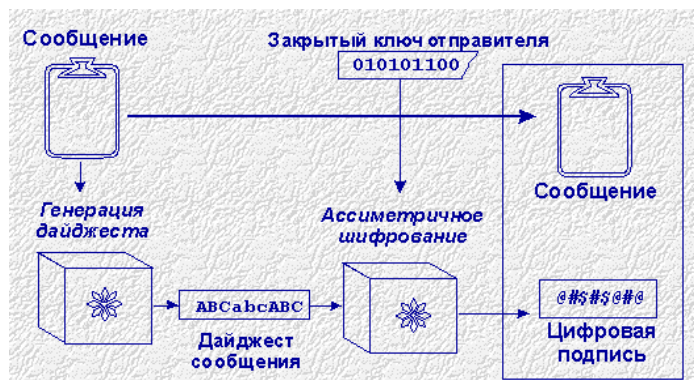


Рис. 1 Алгоритм действий со стороны отправителя документа

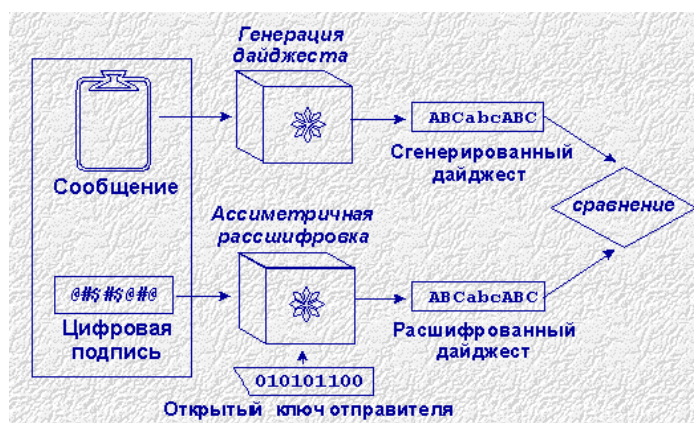


Рис. 2. Алгоритм действий со стороны получателя документа

Длина дайджеста с одной стороны намного меньше, чем возможные исходные сообщения, а с другой стороны такова, что полный перебор возможных значений является практически невыполнимым. Например, длина дайджеста, порождаемого алгоритмами Ривеста – MD2, MD4, MD5, равняется 128 битам, а алгоритмом SHA – 160 битам.

Хэш-функция должна удовлетворять следующим условиям:

- а) на вход алгоритма преобразования может поступать двоичный блок данных произвольной длины;
- б) на выходе алгоритма получается двоичный блок данных фиксированной длины;
- в) значения на выходе алгоритма распределяются по равномерному закону по всему диапазону возможных результатов;
- г) восстановить аргумент по значению с вычислительной точки зрения практически невозможно;

д) при изменении хотя бы одного бита на входе алгоритма его выход значительно меняется: в идеальном случае инвертируется половина бит.

Хэш-функция называется криптографически стойкой, если в дополнение к перечисленным свойствам она удовлетворяет еще двум требованиям:

1) зная результат хэш-функции, невозможно подобрать, кроме как полным перебором, какой-либо входной блок данных, дающий такое же значение на выходе;

2) невозможно подобрать, кроме как полным перебором, пару различных входных блоков, дающих на выходе произвольный, но одинаковый результат.

Разрядность в 128 или 160 бит гарантирует, что на сегодняшнее время в мире не существует двух разных документов, имеющих одинаковую хэш-сумму.

Любой алгоритм хэширования состоит из следующих обязательных шагов:

1. Входные данные разбиваются на блоки по $(k-n)$ бит.

2. На каждой итерации хэширования со значением промежуточной величины, полученной на предыдущей итерации, объединяется очередная $(k-n)$ -битная порция входных данных.

3. Над получившимся в п.2 k -битным блоком производится базовое преобразование. В результате весь входной текст оказывается "перемешанным" с начальным значением вспомогательной величины (условно принятое значение – 0). Из-за характера преобразования базовую функцию часто называют сжимающей.

4. Значение вспомогательной величины после финальной итерации поступает на выход хэш-функции.

В данной работе выявляются особенности реализации стандарта ГОСТ Р 34.11-2012 [1], в частности, рассматривается задача многопоточности в приложении данного стандарта.

Управляемое приложение начинается с единственного потока, но затем может для решения своих задач запускать дополнительные потоки. Параллельно исполняющиеся потоки совместно используют процессор (или процессоры), благодаря системным алгоритмам планирования потоков. Внешне все выглядит так, как если бы все потоки исполнялись одновременно. В действительности же они просто по очереди используют кванты процессорного времени, и весьма эффективно.

Многопоточность – это механизм параллельного выполнения двух или более задач. Исполняемые потоками действия не выполняются быстрее, поскольку конечным ресурсом будет являться процессорное время, но они исполняются асинхронно друг друга, что позволяет параллельно выполнить независимые действия.

Преимущества многопоточности, является выполнение длинного цикла вычислений в однопоточном приложении с GUI (графический интерфейс, форма приложения). Пока единственный поток занят вычислениями значения хеш-функции хеширования, приложение не обращается к очереди сообщений, которые являются каналом пользовательского ввода. В результате, пока не будет получено значение хеш-функции графический интерфейс приложения(GUI, форма приложения), будет “заморожен”, форма зависнет. Это обстоятельство весьма ощутимо вычислении хеш-значения над файлами большого размера(порядка нескольких Гб), а если таких файлов несколько и один поток будет заниматься расчетом, приложение вовсе перестанет быть управляемым.

В многопоточном приложении данная проблема решается путем выполнения вычислений в фоновом потоке. Так как главный поток теперь свободен и может выбирать сообщения из очереди, приложение в состоянии реагировать на действия пользователя (прервать вычисление, закрыть форму и т.д.) даже во время выполнения вычислений.

Многопоточность .NET Framework реализована членами пространства имен System.Threading. Основным классом в нем является класс Thread, который представляет исполняющиеся потоки.

Запустить поток очень просто:

```
Thread^ threadHashSum = gcnew Thread (gcnew ThreadStart ( PotokHashSum ));
```

```
threadHashSum -> Start ();
```

определив функцию хеширования PotokHashSum заранее.

Здесь возникает ещё одна трудность, заслуживающая внимания.

Пусть в функции вычисления значения хеш-функции поддерживается взаимодействие с динамическими элементами формы:

- текстовые поля TextBox, для считывания путь файлов с данными таблиц подстановки, перестановки, умножения L, генерации временного ключа C.

- список ListBox, в котором содержится путь к файлам, подлежащим расчету.

- поле RichTextBox, предназначенное для записи результата расчета.

В свою очередь, управляемый поток может выполнять лишь те функции, которые имеют свойство static(статическое) при объявлении.

Для преодоления данной не состыковки принято использовать делегаты.

Делегат – класс, который позволяет хранить в себе ссылку на метод с определённой сигнатурой (порядком и типами принимаемых и типом возвращаемого значений) произвольного класса.

Для объявления делегата используется ключевое слово delegate, после которого идет возвращаемый тип, название и параметры. Первый делегат ссылается на функцию, которая в качестве параметров принима-

ет два значения типа `int` и возвращает некоторое число. Второй делегат ссылается на метод без параметров, который ничего не возвращает.

```
delegate int Operation(int x, int y);  
delegate void GetMessage();
```

Тогда, получив ссылку на метод, поток выполнит функцию, взаимодействуя с элементами формы графического интерфейса приложения.

Таким образом, вычисление будет производиться в фоновом потоке, приложения способно реагировать на действия оператора, следовательно в следствии обнаружения оператором ошибки вычисление значения хеш-функции может быть прервано, исправлены необходимые файлы и запущено далее, доступно завершение работы приложения с закрытием фонового потока и прекращением расчета.

Библиографический список

1. ГОСТ Р 34.11–2012. Национальный стандарт Российской Федерации. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Функция хэширования. – М. : Стандартинформ, 2012.

2. Жданов, О. Н. Методика выбора ключевой информации для алгоритма блочного шифрования : монография / О. Н. Жданов. – М. : ИНФРА-М, 2016.

3. Панасенко, С. Алгоритмы шифрования. Специальный справочник / С. Панасенко. – Изд. ВHV, 2009.

4. Фомичев, В. М. Дискретная математика и криптология / В. М. Фомичев : Диалог-МИФИ, 2003.

КРИТЕРИЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ НАБЛЮДЕНИЙ В ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

Е. С. Маслов, И. Л. Сандлер

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: fatoneg@mail.ru, viruskvam@bk.ru

В данной статье предлагается критерий позволяющий получать состоятельные оценки стохастических дискретных систем с распределенными параметрами, при наличии помех наблюдения в выходном сигнале. Используя работы [1,2] рассмотрим линейное стохастическое разностное уравнение с распределенными параметрами, задаваемое последовательностями с дискретным временем $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ и точками в пространстве $j, k, l = \dots, -1, 0, 1, \dots$ имеет вид:

$$z_{i,j,k,l} = \sum_{m=1}^r b_m^{(0)} z(i-m, j, k, l) + \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} z(i, j-m, k, l) + \\ + \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} z(i, j, k-m, l) + \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} z(i, j, k, l-m) + a^0 x(i, j, k, l). \quad (1)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями, где $z(i, j, k, l)$ и $x(i, j, k, l)$ – выходной и входной сигналы соответственно; $b_m^{(0)}, b_{m_1}^{(0)}, b_{m_2}^{(0)}, b_{m_3}^{(0)}, a$ – неизвестные параметры системы.

Выходные переменные распределенной системы наблюдаются с помехами:

$$y_{i,j,k,l} = z_{i,j,k,l} + \varepsilon_{i,j,k,l}, w_{i,j,k,l} = x_{i,j,k,l}$$

Требуется по наблюдаемой конечной выборке последовательностей $\{y_{i,j,k,l}\}$ и $\{x_{i,j,k,l}\}$ при известных порядках r, r_1, r_2, r_3 определить оценки неизвестных истинных значений параметров.

Условия:

1⁰. Множество B , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой распределенной системы (1), является компактом

2⁰. Независимые случайные поля $\varepsilon_{i,j,k,l}$ удовлетворяют:

$$E(\varepsilon_{i,j,k,l} | \bar{F}_{i,j,k,l}) = 0; E\left((\varepsilon_{i,j,k,l})^2 | \bar{F}_{i,j,k,l}\right) = c_{i,j,k,l} < \pi_d < \infty;$$

$$E\left((\varepsilon_{i,j,k,l})^4\right) < \pi'_d < \infty.$$

3⁰. Пусть вектор Ξ_{r,r_1,r_2,r_3} :

$$\Xi_{r,r_1,r_2,r_3} = \left| \xi_{i,j,k,l} : \xi_{i-1,j,k,l} \cdots \xi_{i-r,j,k,l} : \dots : \xi_{i,j,k,l-1} \cdots \xi_{i,j,k,l-r_3} : 0 \right|^T, \\ \frac{1}{N} \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^V \Xi_{r,r_1,r_2,r_3} \Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^T \xrightarrow[N, V \rightarrow \infty]{н.н.} \begin{vmatrix} h_\varepsilon^{(0)} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{vmatrix}$$

где $h_\varepsilon^{(0)} \in R_{1 \times 1}, h_\xi = |h_\varepsilon : 0|^T, h_\xi \in R_{r,r_1,r_2,r_3+1,1}, H_\varepsilon = \begin{vmatrix} H_\varepsilon & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{vmatrix},$

$H_\varepsilon \in R_{r+r_1+r_2+r_3, r+r_1+r_2+r_3}$, H_ε положительно определена.

4⁰. Последовательности $x_{i,j,k,l}$ не зависят от $\{\varepsilon_{i,j,k,l}\}$,
 $E\{x_{i,j,k,l}, x_{i-m,j-m_1,k-m_2,l-m_3}\}^2 < \pi_x < \infty$.

5⁰. Входные сигналы $x_{i,j,k,l}$ и истинные значения параметров удовлетворяют:

$$N^{-1} \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \sum_l \left(z^T : x^T \right)^T \left(z^T : x^T \right) \xrightarrow[N, V \rightarrow \infty]{n.н.} H = \begin{bmatrix} H_{zz} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H_{zx}^T & \vdots & H_{xx} \end{bmatrix},$$

где H положительно определенная матрица;

$$z = \begin{bmatrix} z_{i-1,j,k,l} & \cdots & z_{i-r,j,k,l} & \cdots & z_{i,j,k,l-1} & \cdots & z_{i,j,k,l-r_3} \end{bmatrix}^T, x = x_{ijkl}$$

Представим (1) в виде:

$$\begin{aligned} y_{i,j,k,l} = & \varepsilon_{i,j,k,l} + \sum_{m=1}^r b_m^{(0)} y_{i-1,j,k,l} + \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} y_{i,j-m_1,k,l} + \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} y_{i,j,k-m_2,l} + \\ & + \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} y_{i,j,k,l-m_3} + a_{x_{i,j,k,l}}^{(0)} - \sum_{m=1}^r b_m^{(0)} \varepsilon_{i-1,j,k,l} - \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} \varepsilon_{i,j-m_1,k,l} - \\ & - \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} \varepsilon_{i,j,k-m_2,l} - \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} \varepsilon_{i,j,k,l-m_3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$y_{i,j,k,l} = \varepsilon_{i,j,k,l} + \left| y_{r,r_1,r_2,r_3}^T(i,j,k,l) : x_{i,j,k,l} \right| \cdot \left| \frac{b_0}{a_0} \right| - \left(\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^1(i,j,k,l) \right)^T \cdot b_0$$

Обобщенная ошибка имеет вид:

$$e\left(b_m^{(0)}, b_{m_1}^{(0)}, b_{m_2}^{(0)}, b_{m_3}^{(0)} \dots a_{i,j,k,l}^{(0)}\right) = \varepsilon_{i,j,k,l} - \left(\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^1 \right)^T \cdot b.$$

Тогда из условия 3⁰ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \sum_{v=1}^V e\left(b_m^{(0)}, b_{m_1}^{(0)}, b_{m_2}^{(0)}, b_{m_3}^{(0)} \dots a_{i,j,k,l}^{(0)}\right) & \xrightarrow[N, V \rightarrow \infty]{n.н.} h_\varepsilon(0) + \\ & + b^{(0)T} H_\varepsilon \cdot b^{(0)} - 2h_\varepsilon^T b^{(0)} = \omega\left(b^{(0)}, a^{(0)}\right). \end{aligned}$$

Тогда оценку $\hat{b}(N, V) / \hat{a}(N, V)$ неизвестных параметров $|b_0 / a_0|$ из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e^2(b, a, i, j, k, l)$ с весом $\omega(b, a)$

$$\min_{\left(\frac{b}{a}\right) \in B_{R_{r_1+r_2+r_3+1}}} \sum_{i=1}^N \sum_{v=1}^V \frac{\left(y_{i,j,k,l} - \left| y_{r_1,r_2,r_3}^T(i,j,k,l) : x_{i,j,k,l} \right| \left\| \frac{b}{a} \right\| \right)^2}{\omega(b,a)} \quad (2)$$

Предложенный критерий (2) идентификации параметров дискретных динамических систем с распределёнными параметрами при наличии помех наблюдений в выходных сигналах дает наиболее меньшую погрешность оценивания с учетом пространственных составляющих. Дальнейшим направлением работы является обобщение на случай автокоррелированных помех наблюдений [3-5], а также рекуррентной формы [6-7].

Библиографический список

1. Кацюба, О. А. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления / О. А. Кацюба, А. И. Жданов // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 8. – С. 86–90.
2. Кацюба, О. А. Идентификация методов наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений / О. А. Кацюба, А. И. Жданов // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 2. – С. 29–38.
3. Sandler, I. L. Recursive estimation of autoregression parameters multivariate linear discrete dynamical systems of different orders in the presence nonstationary autocorrelated noise in the output signal / I. L. Sandler // Innovation and quality in information technology and data analysis: Proceedings of the International scientific and practical conference. – 2016. – С. 129–132.
4. Сандлер, И. Л. Рекуррентное моделирование авторегрессионной модели многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы с автокоррелированными зашумленными выходными сигналами / И. Л. Сандлер // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф.; под ред. И. В. Бойкова. – 2016. – С. 150–155.
5. Сандлер, И. Л. Рекуррентный алгоритм моделирования многомерных линейных дискретных динамических систем разного порядка при наличии автокоррелированных помех в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Вестник транспорта Поволжья. – 2017. – № 2 (62). – С. 98–104.
6. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 14–27.
7. Иванов, Д. В. Идентификация моделей длинных линий на основе адаптивных фильтров с разностями дробного порядка / Д. В. Иванов, О. А. Кацюба, А. Е. Дубинин // Электротехника. – 2017. – № 3. – С. 23–26.

ФОТОГАЛЬВАНИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В АСИММЕТРИЧНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ И ЕГО ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

П. П. Першенков, Е. В. Грозная

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: peter@pnzgu.ru

Одним из наиболее актуальных вопросов современной науки и техники является внедрение научных достижений в области квантовой физики и теории наноструктур в создание новых технологий, сенсоров и преобразователей, работающих на новых физических эффектах. Весьма перспективным в этом плане является исследование фотогальванического эффекта (ФГЭ) в асимметричных наноструктурах.

Впервые возможность возникновения электрического тока под воздействием света в асимметричной наноструктуре в магнитном поле была обоснована в работе [1].

В более поздних работах [2–8] подробно рассмотрены вопросы теории и экспериментального исследования внутризонного поглощения высокочастотного излучения.

В связи с этим весьма актуальным является исследование оптических свойств квантовых низкоразмерных структур в перспективах дальнейшего применения в приборах оптоэлектронной измерительной техники и диагностике.

В работе [6] рассмотрен ФГЭ в асимметричной наноструктуре GaAs/AlGaAs при лазерном облучении образца. Показано, что значение фототока пропорционально напряженности магнитного поля. Причем при изменении направления магнитного поля изменяется и направление фототока. На рис. 1 приведена зависимость фототока от напряженности магнитного поля. Образец освещается лазером с длиной волны $\lambda = 1,065$ мкм, магнитное поле изменялось до 11 кЭ.

Линейная зависимость фототока от напряженности магнитного поля позволяет использовать подобные асимметричные наноструктуры для создания как магнитометров, так и фоточувствительных детекторов.

В работе [7] приведены результаты исследования фотогальванического эффекта на асимметричной наноструктуре в более сильных полях с напряженностью 75 кЭ.

Исследовались образцы наноструктуры $i\text{-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/i\text{-GaAs}$ ($x = 0,25$) с тремя квантовыми ямами шириной слоёв $L_w = 54, 60$ и $70 \text{ \AA}$, разделенных барьерными слоями $L_B = 20$ и $30 \text{ \AA}$. Данная асимметричная система туннельносвязанных квантовых ям находилась между двумя

широкими (200 Å) барьерными слоями $i\text{-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ($x = 0,25$) со стороны буферного слоя $i\text{-GaAs}$ (1 мкм) и закрывающего структуру слоя $i\text{-GaAs}$ (200 Å).

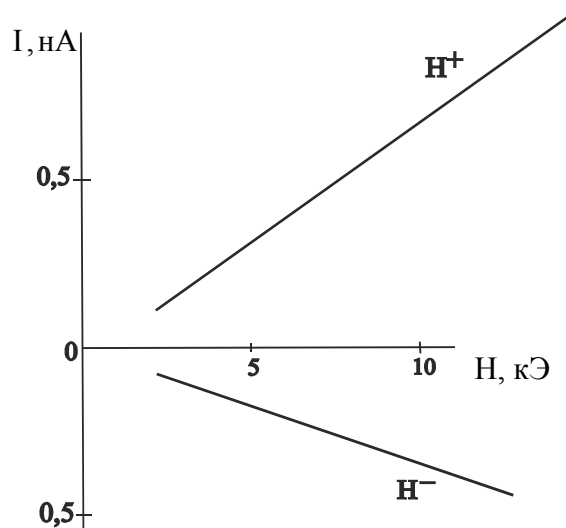


Рис. 1

Как следует из результатов экспериментального исследования указанных образцов, вольтамперная характеристика ФГЭ и зависимость фототока от напряженности магнитного поля нелинейны уже после 20 кЭ.

Это затрудняет использование данных наноструктур в измерительных преобразователях, так как необходимо применять специальные устройства обработки данных.

Относительно просто проблема нелинейности может быть решена путём создания интеллектуального датчика магнитного поля или светового излучения со встроенным микропроцессором [8,9].

Положительной особенностью рассмотренных в работе [8] наноструктур является то, что при увеличении диаметра светового пятна с 2 до 5 мм ток ФГЭ возрастает более чем в 2 раза. Из этого следует, что данный образец обладает достаточно высокой чувствительностью к мощности светового потока.

Это позволяет использовать наноструктуры для построения детектора светового потока, который будет реагировать на изменение мощности (интенсивности) светового потока.

На рис. 2 приведена схема детектора излучения, в состав которой входят источники тока (ИТ), образец наноструктуры, образцовый резистор R_0 и операционный усилитель ОУ. Резистор R_2 служит для задания необходимого коэффициента передачи. Резистором R_3 задаётся порог срабатывания детектора.

При отсутствии светового потока или его малой интенсивности током I_0 от источника тока задаются начальные условия. Это также может позволить повысить чувствительность детектора.

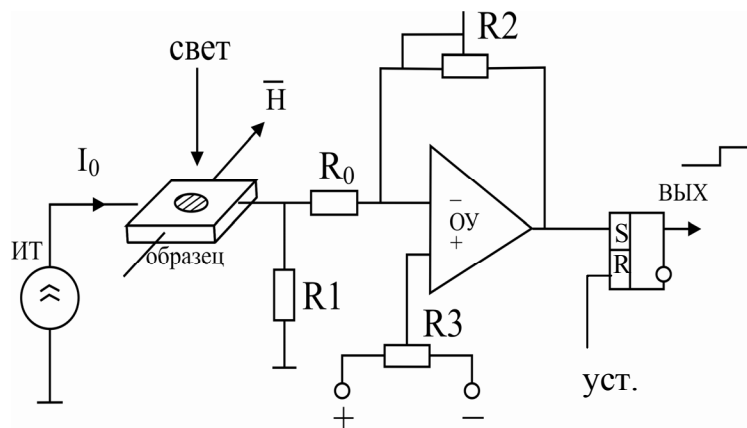


Рис. 2

При попадании светового потока на образец, увеличивается ток через резистор R_0 , что приводит в конечном итоге к изменению фазы выходного напряжения операционного усилителя и срабатыванию триггера. Это и будет служить признаком появления или исчезновения светового потока.

Как показывают предварительные расчеты, чувствительность тока детектора при нормальной температуре и напряжении магнитного поля 20 кЭ составляла около 1 мВт. При использовании в качестве источника света лазера детектор может работать на большом расстоянии. Для повышения чувствительности образцы могут быть соединены в батарею.

В работе [9] рассмотрена возможность применения ФГЭ для создания датчика магнитного поля.

Библиографический список

1. Горбацевич, А. А. Асимметричные наноструктуры в магнитном поле / А. А. Горбацевич, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев // Письма в ЖЭТФ. – 1993. – Т. 57, № 9. – С. 565–569.
2. Белиничер, В. И. / Фотогальванический эффект в средах без центра / В. И. Белиничер, Б. И. Стурман // Успехи физических наук. – 1980. – Т. 130, № 3. – С. 415.
3. Алещенко, Ю. А. Индуцированный магнитным полем фотогальванический эффект в асимметричной системе квантовых ям / Ю. А. Алещенко, И. Д. Воронова, С. П. Гришечкина и др. // Письма в ЖЭТФ. – 1993. – Т. 58, № 5. – С. 377–380.
4. Гавриленко, В. И. Оптические свойства полупроводников. Справочник / В. И. Гавриленко, А. М. Грехов. – Киев : Наукова Думка, 208, 1987.
5. Артамонов, Ю. А. Фотогальванический эффект в орбитальном антиферромагнетике / Ю. А. Артамонов, А. М. Горбацевич, Ю. В. Копаев // Письма ЖЭТФ. – 1992. – Т. 101. – С. 557.
6. Кучеренко, И. В. Фотогальванический эффект в асимметричной наноструктуре GaAs/AlGaAs при лазерном возбуждении / И. В. Кучеренко, Л. К. Водопьянов, В. И. Кадушкин // Физика и техника полупроводников. – 1997. – Т. 31, № 7. – С. 872.

7. Омеляновский, О. Е. Фотогальванический эффект в асимметричной системе трех квантовых ям в сильном магнитном поле / О. Е. Омеляновский, В. И. Цебро, В. И. Кадушкин // Письма в ЖЭТФ. – 1996. – Т. 63. – С. 197.

8. Першенков, П. П. Применение интеллектуальных датчиков в современных ИИС / П. П. Першенков // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2011. – Т. 1. – С. 68.

9. Першенков, П. П. Интеллектуальный датчик на основе фотогальванического эффекта Измерение, мониторинг, управление, контроль / П. П. Першенков, А. В. Савенков // Научно-производственный журнал. – 2016. – № 4(18). – С. 5.

О МЕТОДАХ ОБРАБОТКИ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева, И. В. Алексеев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: Gef44@yandex.ru, tank1100@yandex.ru, idalexixxx@gmail.com

Распознавание речи является задачей классификации образов акустических характеристик речевых сигналов. В системах распознавания речи выделяются два основных блока: - блок акустического анализа, предназначенный для выделения информативных акустических характеристик речевого сигнала и формирования акустического образа, сигнала как набора характеристик и - блок классификации путем сравнения с обученными акустическими моделями - эталонами.

В настоящее время техника распознавания речи находится в постоянном развитии. Методы цифровой обработки сигналов, как правило, осуществляют преобразование, фильтрацию и трансформацию звукового сигнала в цифровой формат данных и представления, которые могут непосредственно обрабатываться системой распознавания речи. Методы же распознавания образов используют при выделении и распознавании отдельных слов или предложений речевого потока или в некоторых случаях для идентификации говорящего.

Кроме того, системы распознавания и синтеза речи затрагивают вопросы лингвистики, в которой заложены фундаментальные концепции и принципы распознавания речи и понимания языка.

Речевое общение начинается с того, что в мозгу диктора возникает в абстрактной форме некоторое сообщение. В процессе речеобразования это сообщение преобразуется в акустическое речевое колебание. Информация, содержащаяся в сообщении, представлена в акустическом колебании весьма сложным образом. Сообщение сначала преобразуется в последовательности нервных импульсов, управляющих артикуляторным аппаратом (т.е. перемещением языка, губ, голосовых связок и т.д.).

В результате воздействия нервных импульсов артикуляторный аппарат приходит в движение, результатом которого является акустическое речевое колебание, несущее информацию об исходном сообщении.

Хотя термин «распознавания речи» встречается очень часто, на самом деле он имеет много различных значений. Как правило, в существующих системах используются два принципиально разных подхода: 1) распознавание голосовых меток; 2) распознавание лексических элементов.

Первый подход предполагает распознавание фрагментов речи по заранее записанному образцу. Этот подход широко используется в относительно простых системах, предназначенных для исполнения заранее записанных речевых команд.

Второй подход сложнее. При его реализации из потока речи выделяются отдельные лексические элементы - фонемы и аллофоны, которые затем объединяются в слоги и морфемы. Здесь применяются такие методы описания речи, как грамматики, конечные автоматы, n-граммы. Для описания фонем используются модели Гауссовских смесей, скрытые Марковские модели. Строго говоря, именно этот подход и используется в «настоящих» системах распознавания речи.

Вопросы обработки речевых сигналов являются, главным образом, частью дисциплин, именуемых цифровой обработкой сигналов и распознаванием образов.

Для количественного описания процессов формирования и передачи речевых сигналов было предложено много различных моделей [6]. Можно с уверенностью сказать, что ни одна из них не позволяет объяснить все характеристики человеческой речи. Такая универсальная модель, в силу своей большой сложности, вероятно, и не потребуется. Во всех практических случаях при выборе математической модели стремятся обеспечить ее минимальную сложность при максимальной точности. Одной из наиболее удачных моделей акустического речевого сигнала является линейная модель, разработанная Фантом [8]. Эта модель называется моделью речеобразования.

Методы цифровой обработки и передачи речевых сигналов в настоящее время интенсивно развиваются. Это, прежде всего, обусловлено прогрессом в области цифровой микросхемотехники, благодаря которому появилась реальная возможность изготовления сложной цифровой аппаратуры передачи сообщений, а также цифровых устройств распознавания речи, синтеза речи и др. Например, в работе [7] предлагается реализация на ПЛИС (программируемой логической интегральной схеме) системы распознавания речи. Общий алгоритм распознавания речевого сигнала можно описать следующим образом.

При распознавании образца проводится процесс, первым шагом которого является первоначальное трансформирование вводимой информации для сокращения обрабатываемого объема так, чтобы ее можно было бы подвергнуть анализу. Следующим этапом является спектраль-

ное представление речи. Спектральное представление достигнуто путем использования широко-частотного анализа записи.

Хотя спектральное представление речи очень полезно, необходимо помнить, что изучаемый сигнал весьма разнообразен.

Разнообразие возникает по многим причинам, включая:

- различия человеческих голосов;
- уровень речи говорящего;
- вариации в произношении;
- нормальное варьирование движения артикуляторов (языка, губ, челюсти, нёба).

Затем определяются конечные выходные параметры для варьирования голоса и производится нормализация для составления шкалы параметров, а также для определения ситуационного уровня речи. Вышеописанные измененные параметры используются затем для создания шаблона. Шаблон включается в словарь, который характеризует произношение звуков при передаче информации говорящим, использующим эту систему. Далее в процессе распознавания новых речевых образцов (уже подвергшихся нормализации и получивших свои параметры), эти образцы сравниваются с шаблонами, уже имеющимися в базе, используя динамичное искажение и похожие метрические измерения.

Разнообразие акустических характеристик голоса является одной из основных причин неустойчивости показателей систем распознавания речи. Как было показано в статье [5], обработка речевых сигналов для мужских и женских голосов с целью определения их по разным этническим признакам должна определяться по различным методикам. Известно, одной из важнейших характеристик речи является логарифмический спектр. Примеры спектров для участков речевого сигнала для мужских и женских голосов представлены на рис. 1 а) и б) соответственно.

Сравнение рис.1 а) и б) показывает, что для женского голоса частота основного тона гораздо выше, чем для мужского.

Различие акустических характеристик мужских и женских голосов определяется неодинаковостью физиологических параметров голосового источника, размеров речевого тракта и параметров его стенок. Размеры гортани, голосовых складок и мышц, управляющих их колебаниями, различны у мужчин и женщин. Это дает основания для поиска различительных признаков в параметрах импульсов голосового возбуждения и формы колебаний голосовых складок. Все дело в длине голосовых связок: у мужчин они длиннее, а у женщин короче. Именно для того, чтобы их вместить, у мужчин на шее выпирает кадык - адамово яблоко. Голосовые связки устроены как струны на гитаре: если струну зажать и тем самым укоротить, тон становится выше.

Но в то же время, методов, способных с одинаковой погрешностью предсказания распознавать и мужские и женские голоса, нет. Исследование данной проблемы является актуальным на сегодняшний день.

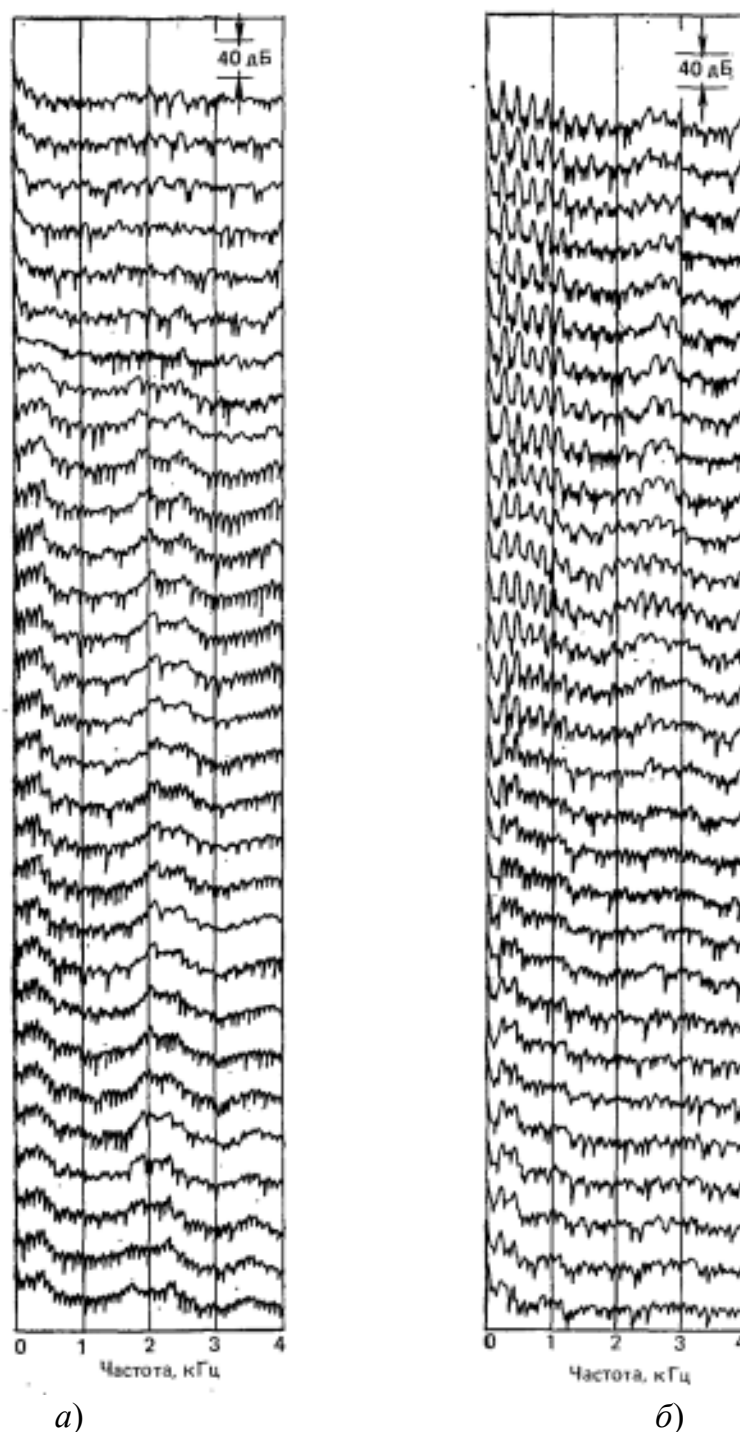


Рис. 1. *а* – набор логарифмов спектра для мужского голоса,
б – набор логарифмов спектра для женского голоса

Библиографический список

1. Маркел, Дж. Д. Линейное предсказание речи / Дж. Д. Маркел, А. Х. Грэй ; пер. с англ. / под ред. Ю. Н. Прохорова, В. С. Звездина. – М. : Связь, 1980. – 308 с.
2. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер. – М. : Радио и связь, 1981.
3. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990.

4. Ахмад, Х. М. Введение в цифровую обработку речевых сигналов : учеб. пособие / Х. М. Ахмад, В. Ф. Жирков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 192 с.

5. Черушева, Т. В. Акценты в речи людей / Т. В. Черушева, Ю. С. Андряшкина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (20–22 мая 2015 г., г. Пенза.); под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015.

6. Алимуратов, А. К. Обзор и классификация методов обработки речевых сигналов в системах распознавания речи / А. К. Алимуратов, П. П. Чураков //Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2015. – № 2(12), – С. 27–35.

7. Парамонов, П. А. Методы, алгоритмы и устройства распознавания речи в ассоциативной осцилляторной среде / П. А. Парамонов. – дис. ... канд. техн. наук (на правах рукописи), 2015.

8. Fant, G. G. M. Acoustic theory of speech production / G. G. M. Fant. – Paris : Mouton & Co., The Hague, 1970. – 328 pp.

РЕКУРРЕНТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Е. А. Сандлер

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: e_sandler@bk.ru

В работе предлагается определение методом стохастической аппроксимации электромагнитных параметров модели асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором при питании от трехфазного источника синусоидального тока при наличии ошибок при измерения входных параметров. Используя систему уравнений [1,2], описанную в неподвижной системе координат $(\alpha, \beta, 0)$ следующей системой:

$$\frac{di^{(s\alpha)}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} U^{(s\alpha)} - \gamma i^{(s\alpha)} + \frac{\beta}{T_r} \Psi^{(r\alpha)} + p\beta\omega \Psi^{(r\beta)}, \quad (1)$$

$$\frac{di^{(s\beta)}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} U^{(s\beta)} - \gamma i^{(s\beta)} + \frac{\beta}{T_r} \Psi^{(r\beta)} + p\beta\omega \Psi^{(r\alpha)}, \quad (2)$$

$$\frac{d\Psi^{(s\alpha)}}{dt} = \frac{L_m}{T_r} i^{(s\alpha)} - \frac{\Psi^{(r\alpha)}}{T_r} - p\omega \Psi^{(r\beta)}, \quad (3)$$

$$\frac{d\Psi^{(s\beta)}}{dt} = \frac{L_m}{T_r} i^{(s\beta)} - \frac{\Psi^{(r\alpha)}}{T_r} - p\omega\Psi^{(r\alpha)}, \quad (4)$$

$$M = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{\sigma L_r} \left(\Psi^{(r\alpha)} i^{(s\beta)} - \Psi^{(r\beta)} i^{(s\alpha)} \right), \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J} (M - M_c), \quad (6)$$

где $i^{(s\alpha)}$, $i^{(s\beta)}$ – проекции вектора тока статорной цепи двигателя на оси α и β , соответственно; $U^{(s\alpha)}$, $U^{(s\beta)}$ – проекции вектора напряжения статорной цепи двигателя на оси α и β , соответственно; $\Psi^{(r\alpha)}$, $\Psi^{(r\beta)}$ – проекции вектора потокосцеплений ротора на оси α и β , соответственно; $\sigma = 1 - L_m^2 / (L_s L_r)$ – полный коэффициент рассеивания машины; L_m , L_r – взаимная индуктивность, индуктивность статорной цепи двигателя, индуктивность роторной цепи двигателя, соответственно; R_s , R_r – активные сопротивления статорной и роторной цепи двигателя; T_r – постоянная времени роторной цепи двигателя; p – число пар полюсов; ω – частота вращения ротора; J – приведенный момент инерции двигателя; M_c – момент сопротивления движению; γ, β – некоторые коэффициенты, зависящие от индуктивностей и активных сопротивлений двигателя.

Получена разностная форма уравнения, описывающие работу асинхронного привода при постоянном числе оборотов вала $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{\Delta^2} \left(i_k^{(s\alpha)} - 2i_{k-1}^{(s\alpha)} + i_{k-2}^{(s\alpha)} \right) + \frac{p\omega}{\Delta} \left(i_k^{(s\beta)} - i_{k-1}^{(s\beta)} \right) \right) = \\ & = K_1 \frac{1}{\Delta} \left(i_k^{(s\alpha)} - i_{k-1}^{(s\alpha)} \right) + K_2 i_k^{(s\alpha)} + \\ & + K_3 p\omega i_k^{(s\beta)} - K_4 \left(\frac{1}{\Delta} \left(U_k^{(s\alpha)} - U_{k-1}^{(s\alpha)} \right) + p\omega U_k^{(s\beta)} \right) - K_5 U_k^{(s\alpha)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{i}_k^{(s\alpha)} &= i_k^{(s\alpha)} + \xi_k^{(is\alpha)}, \quad \tilde{i}_k^{(s\beta)} = i_k^{(s\beta)} + \xi_k^{(is\beta)}, \\ \tilde{U}_k^{(s\alpha)} &= U_k^{(s\alpha)} + \xi_k^{(Us\alpha)}, \quad \tilde{U}_k^{(s\beta)} = U_k^{(s\beta)} + \xi_k^{(Us\beta)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где Δ – интервал дискретизации. $i_k^{(s\alpha)}$, $i_k^{(s\beta)}$ – ненаблюдаемые значения проекции вектора тока статора на оси α и β , соответственно; $\tilde{i}_k^{(s\alpha)}$,

$\tilde{i}_k^{(s\beta)}$ – ненаблюдаемые значения проекций вектора тока статора на оси α и β , соответственно; $U_k^{(s\alpha)}$, $U_k^{(s\beta)}$ – ненаблюдаемые значения проекций вектора напряжения статора на оси α и β , соответственно; $\tilde{U}_k^{(s\alpha)}$, $\tilde{U}_k^{(s\beta)}$ – наблюдаемые значения проекций вектора напряжения статора на оси α и β , соответственно; $\xi_k^{(is\alpha)}$, $\xi_k^{(is\beta)}$, $\xi_k^{(Us\alpha)}$, $\xi_k^{(Us\beta)}$ – ошибки измерений соответствующих измеряемых значений.

Тогда оценки неизвестных К-параметров регрессионной модели описываемая уравнениями (7,8) можно определить по наблюдаемым величинам вектора тока и вектора напряжения статорной цепи двигателя по осям α и β $\tilde{i}_k^{(s\alpha)}$, $\tilde{i}_k^{(s\beta)}$, $\tilde{U}_k^{(s\alpha)}$, $\tilde{U}_k^{(s\beta)}$.

Основой для построения адаптивного алгоритма идентификации служат рекуррентные модификации алгоритма [3-7]. Рассмотрим стохастический градиентный алгоритм:

$$\begin{aligned} \hat{K}(k+1) = \hat{K}(k) - \delta_k \nabla_K \times \\ \times \left[\frac{\left(y_{k+1} - \Phi_{k+1}^T \hat{K}(k) \right)^2}{6\Delta^{-4} + 2p^2\omega^2\Delta^{-2} + \left(\hat{K}(k) \right)^T \bar{H}_\xi \hat{K}(k) + 2\left(\hat{K}(k) \right)^T \bar{h}_\xi} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где δ_k последовательность, для которой:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_k = \infty \text{ и } \sum_{i=0}^{\infty} \delta_k^l < \infty \text{ при } l > 1. \quad (10)$$

Оценки, получаемые с помощью стохастического градиентного алгоритма (10) будут получаемы и сильно состоятельными.

Для отслеживания изменения параметров в процессе работы электродвигателя, можно модифицировать формулу (9), используя экспоненциальное сглаживание тогда:

$$\begin{aligned} \hat{K}(k+1) = \delta \hat{K}(k) - (1-\delta) \nabla_K \times \\ \times \left[\frac{\left(y_{k+1} - \Phi_{k+1}^T \hat{K}(k) \right)^2}{6\Delta^{-4} + 2p^2\omega^2\Delta^{-2} + \left(\hat{K}(k) \right)^T \bar{H}_\xi \hat{K}(k) + 2\left(\hat{K}(k) \right)^T \bar{h}_\xi} \right], \end{aligned}$$

где $\delta \approx 0.98 \dots 0.995$.

Библиографический список

1. Виноградов, А. Б. Векторное управление электроприводами переменного тока / А. Б. Виноградов. – Иваново : Ивановский гос. энергетич. ун-т им. В. И. Ленина, 2008. – 298 с.
2. Панкратов, В. В. Векторное управление асинхронными электроприводами : учеб. пособие / В. В. Панкратов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1999. – 66 с.
3. Кацюба, О. А. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / О. А. Кацюба, И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – Т. 47, № 1. – С. 31–34.
4. Сандлер, И. Л. Рекуррентная идентификация параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Вестник транспорта Поволжья. – 2012. – № 2. – С. 68–74.
5. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров авторегрессии многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехой в выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – Т. 53, № 31. – С. 164–167.
6. Кацюба, О. А. Идентификация параметров многомерных по входу линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / О. А. Кацюба, Д. В. Иванов // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – Т. 38, № 4. – С. 15–19.
7. Иванов, Д. В. Рекуррентное оценивание билинейных агх-систем с помехой наблюдения во входном сигнале / Д. В. Иванов, О. В. Усков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 43–50.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПРИЗНАКОВ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ, РАЗЛИЧАЮЩИХСЯ В МУЖСКОЙ И ЖЕНСКОЙ РЕЧИ

Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: Gef44@yandex.ru, tank1100@yandex.ru

Голос – такая же неотъемлемая черта каждого человека, как и его лицо или отпечатки пальцев. Широкое распространение средств связи (стационарные и мобильные телефонные сети, Интернет-телефония и т.д.) открывают большие возможности для применения данного иденти-

фикатора; кроме того, распознавание по голосу весьма удобно для пользователей и требует от них минимум усилий. [1]

Необходимо учитывать, что голос (наряду с почерком, походкой и т.п.) относится к так называемым «поведенческим» идентификаторам. Он подвержен существенным изменениям под воздействием эмоциональных факторов и состояния здоровья. При распознавании могут сказываться также внешние условия (например, посторонние шумы от дорожного движения, разговоров других людей). Поэтому достичь высокой точности и надежности в распознавании звуковых сигналов, а также выявить отличия по гендерному признаку, является чрезвычайно сложной задачей.

В профессиональной сфере существует специальное программное обеспечение криминалистического исследования фонограмм русской речи SIS II. Оно позволяет:

- преобразовывать аналоговые сигналы в цифровую форму;
- осуществлять редактирование аудиозаписей;
- производить шумоочистку и улучшать разборчивость зашумлённых участков фонограммы;
- осуществлять вычисления и визуализацию для осциллограмм, динамических спектрограмм БПФ и коэффициенты линейного предсказания (изображения видимой речи), динамических кепстрограмм (функций периодичности сигнала), траекторий основного тона, траекторий формант, энергии сигнала и тому подобное.

Но так как доступ к данному программному обеспечению имеют лишь специалисты в области экспертизы фонограмм речи, был предпринят поиск метода, позволяющего достаточно точно отличить запись женского голоса от мужского.

В области обработки речевых сигналов кепстральный анализ получил широкую популярность. Известно, что при преобразовании сигнала из временной области в частотную информация оказывается более подробной, наглядной и компактной.

Исходя из указанных достоинств спектрального представления информации родилась идея кепстрального анализа: замена в спектре оси частоты на ось времени, другими словами, представить, что спектр является просто сигналом. Таким образом, появится возможность представить исходную спектральную информацию еще более компактно, когда каждый гармонический ряд исходного спектра будет представлен всего одной составляющей в кепстре.

Преобразование Фурье (ПФ) используется во многих областях науки, в том числе и в речевых технологиях. В области обработки речевых сигналов ПФ рассматривается как преобразование сигнала из временной области в частотную и разложение его на частотные составляющие:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

где $S(\omega)$ – сигнал в частотной области, $s(t)$ – сигнал во временной области, j – мнимая единица.

В задачах цифровой обработки часто используют дискретное преобразование Фурье, так как речевой сигнал часто представляют в дискретном виде, как сумму гармонических составляющих:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-jk\omega nT},$$

где k – номер гармоники, $\omega = \frac{2\pi}{(N-1)T}$ – частота первой гармоники,

$0 < n < N$ – дискретные отсчеты по времени, T – период частоты дискретизации.

На сегодняшний день принято считать, что кепстр – это спектр логарифма спектра исходного сигнала, т.е. первоначальный спектр должен быть представлен в логарифмическом масштабе [2]:

$$C_s(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(S(\omega))^2 e^{jq\omega} d\omega, \quad (1)$$

где $S(\omega)$ – амплитудный спектр сигнала $s(t)$.

Из формулы (1) видно, что $S^2(\omega)$ имеет смысл спектральной плотности энергии сигнала $s(t)$. Тогда $C_s(q)$ интерпретируется как энергетический спектр функции $\ln(S(\omega))^2$.

В данной статье с помощью кепстрального анализа строится алгоритм, позволяющий выделить различия между записанными мужскими и женскими голосами. Стояла задача однозначного определения гендерной принадлежности говорящего из исходного звукового файла.

Общая идея реализации алгоритма вычисления и построения кепстра выглядит следующим образом:

- К входящему сигналу применяется ДПФ;
- Реализуется вычисление логарифма спектра;
- Применяется обратное ДПФ.

На основе описанной идеи была разработана программа в пакете прикладных программ для решения задач технических вычислений Matlab.

Всего было записано 19 мужских голосов и 14 женских. Одна из тестовых фраз – “Выходила на берег Катюша”. Графики сигналов строились с использованием действительного логарифма входного сигнала. Была выделена область значений, в которую попадали отдельно мужские и женские голоса: по шкале Time мужские голоса находятся в области до 1.5 единиц, а женские – после. Это хорошо видно на рис. 1 а) и б) соответственно.

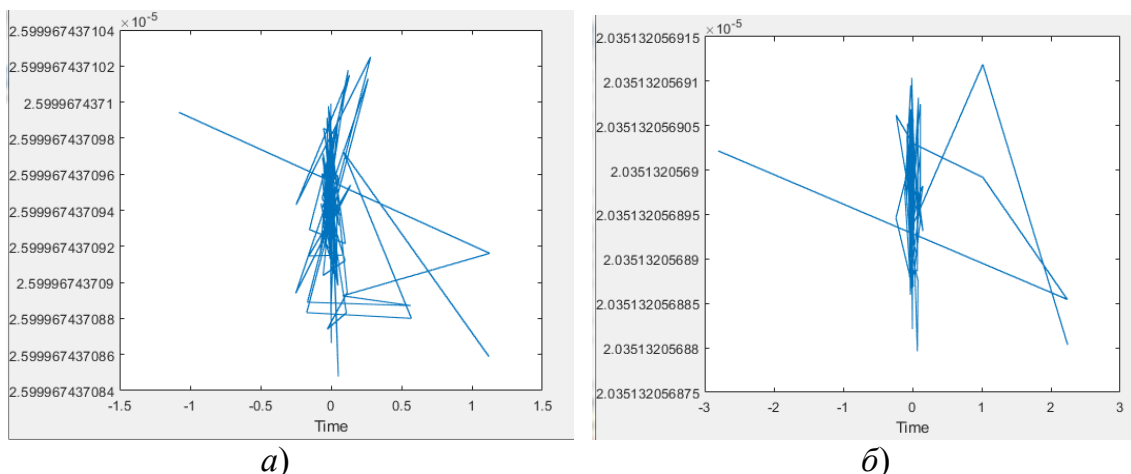


Рис. 1. *а* – набор логарифмов спектра для мужского голоса;
б – набор логарифмов спектра для женского голоса

Если женские голоса попадают в интервал до 1.5 единиц, или, наоборот, мужские выходят за этот интервал, то исследуется комплексный логарифм входного сигнала. Результаты представлены на рис. 2.

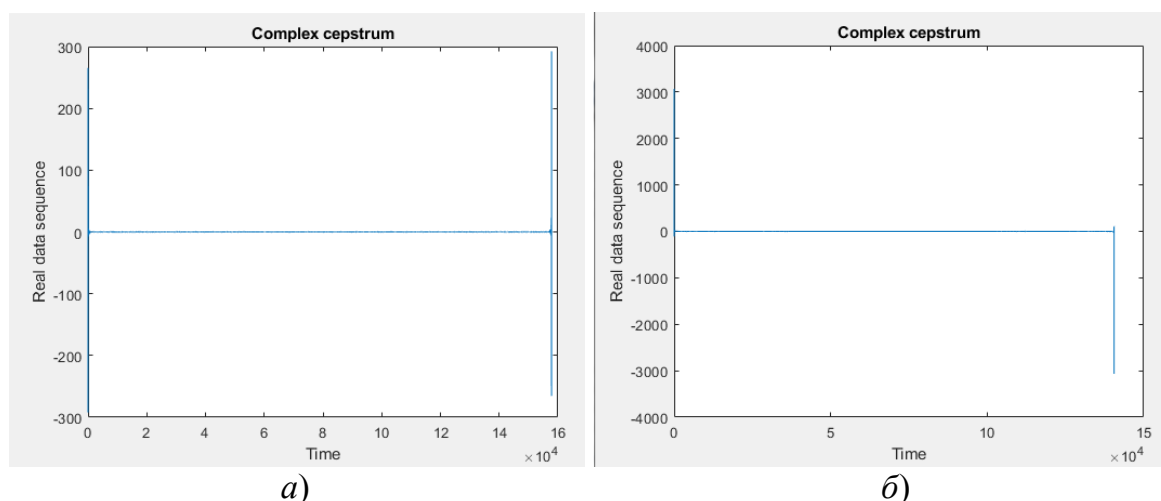


Рис. 2. *а* – действительная часть комплексного кепстра для мужского голоса;
б – действительная часть комплексного кепстра для женского голоса

Статистика показывает, что размах значений действительных частей кепстра для женских голосов больше, чем для мужских голосов.

Разработанный метод позволяет выделять признаки, различающие женские и мужские голоса. В ходе исследования обнаружено, что алгоритм работает как для записи, содержащей целую фразу, так для записи, содержащей слово из фразы.

Таким образом, можно говорить об удовлетворительном уровне распознавания гендерных звуковых сигналов с помощью кепстрального анализа. Синтезированный алгоритм подходит для достаточно широкого класса задач, например, в криминалистике, региональных и федеральных службах связи.

Библиографический список

1. Глушко, Я. В. Спектральный и кепстральный анализ звука для идентификации голоса / Я. В. Глушко, В. Я. Данилов // Теоретические и прикладные проблемы физики, математики и информатики: сб. ст. XIV Всеукраинской науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. (г. Киев, Украина, 26–28 мая 2016 г.). – Киев : Изд-во КПИ, 2016.
2. Алимуратов, А. К. Обзор и классификация методов обработки речевых сигналов в системах распознавания речи / А. К. Алимуратов, П. П. Чураков // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2015. – № 2(12), – С. 27–35.
3. Маркел, Дж. Д. Линейное предсказание речи / Дж. Д. Маркел, А. Х. Грэй; пер. с англ. / под ред. Ю. Н. Прохорова, В. С. Звездина. – М. : Связь, 1980. – 308 с.
4. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер. – М. : Радио и связь, 1981.
5. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990.
6. Черушева, Т. В. Акценты в речи людей / Т. В. Черушева, Ю. С. Андряшкина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 20–22 мая 2015 г.) ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015.
7. Fant, G. G. M. Acoustic theory of speech production / G. G. M. Fant. – Paris : Mouton & Co., The Hague, 1970. – 328 pp.

КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Т. В. Черушева, А. С. Нурков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: tank1100@yandex.ru, alexander_nurkov@mail.ru

Необходимость создания голосовых интерфейсов, а также специальных инструментов, которые предназначены для использования службами безопасности явилась толчком к развитию речевых технологий.

Развитие речевых технологий связано с продвижением Интернет-технологий, мобильных сетей, повышением скорости и качества Интернет-соединений. На данный момент, такие компании как Google и Yandex являются ведущими лидерами в области разработки систем по распознаванию речевых сигналов.

Google принадлежит голосовая поисковая система «Okay, Google», с помощью которой любой пользователь может без использования клавиатуры голосовой командой найти необходимую информацию в Интернете или приложение в магазине Google Play. В первую очередь дан-

ный голосовой поиск создан в помощь людям с ограниченными возможностями. Это, пожалуй, одна из немногих компаний, которая достигла огромных результатов в продвижении и развитии искусственного интеллекта (ИИ) в области речевых технологий.

На следующей позиции можно выделить такую компанию, как Yandex. К её достижениям относится голосовой ассистент «Алиса», разработка которого основана на использовании нейронной сети, что дает возможность реагировать на поставленные вопросы пользователей.

Кепстр – энергетический спектр функции $\ln|S(\omega)|^2$, определяемый выражением

$$C_s(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|S(\omega)|^2 e^{i\omega q} d\omega$$

то есть кепстр задает последовательность коэффициентов разложения некоторой функции $\ln[\Phi(z)]$ в степенной ряд. Аргумент q , который называют «сачтота» или «кьюфренси» здесь имеет временную размерность, но уже в смысле понятия кепстра (особое кепстральное время), так как в любой момент времени данная переменная будет зависеть от функции $s(t)$ исходного сигнала со спектром $S(\omega)$, которая задана на интервале $-\infty < t < \infty$.

На практике, вычисление кепстра производится непосредственно через его определение по формуле

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega, \quad (1)$$

используя дискретное преобразование Фурье (ДПФ) следующим образом:

$$X_a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, 0 \leq k < N; \quad (2)$$

$$\hat{X}_a[k] = \ln X_a[k], 0 \leq k < N; \quad (3)$$

$$\hat{x}_a[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_a[k] e^{-j2\pi nk/N}, 0 \leq k < N. \quad (4)$$

Подстрочный индекс a означает, что новый комплексный кепстр $\hat{x}_a[n]$ является наложением функции $\hat{x}[n]$,

$$\hat{x}_a[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n + rN] \quad (5)$$

элементы которой могут быть получены с помощью теоремы выборки, обращая понятия времени и частоты.

Такое наложение приводит к ошибкам в оценке, которое можно уменьшить, выбрав большое значение N . Вычисление комплексного кепстра требует вычисления комплексного логарифма

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \ln X(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})| + j\theta(\omega) \quad (6)$$

и, в свою очередь, фазы. Однако, учитывая основное значение фазы $\theta_p[k]$, существует бесконечное число возможных значений $\theta[k]$:

$$\theta[k] = \theta_p[k] + 2\pi n_k. \quad (7)$$

Если $x[n]$ действительна, то $\arg[X(e^{j\omega})]$ является нечетной функцией, а также непрерывной. Поэтому мы можем выполнить фазовое преобразование, выбрав такое n_k , чтобы $\theta[k]$ являлась гладкой функцией для того, чтобы разность между соседними значениями была мала:

$$|\theta[k] - \theta[k-1]| < \pi. \quad (8)$$

Чтобы иметь небольшие различия фаз, требуется выбрать такое значение N , которое будет в несколько раз больше размера окна, т.е. до быстрого преобразования Фурье (БПФ) входной сигнал должен быть обнулён.

Таким образом, кепстр является нормированным спектром логарифма спектра, который строится из исходного сигнала и предоставляет наглядную графическую информацию о поступающем речевом потоке.

Рассмотрим естественные мужские и женские голоса и их имитацию Google'ом и Yandex'ом (рис. 1–5).

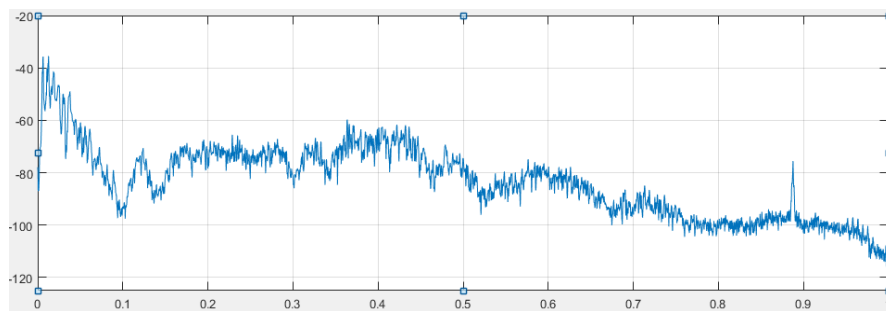


Рис. 1. Естественный голос (мужской)

Как видим, записи речевых сигналов естественных и роботизированных голосов на концах имеют явные отличия.

В данной статье рассматривается применение кепстрального анализа к распознаванию речевых сигналов и выделению признаков, характеризующих разницу в естественных и искусственных голосах.

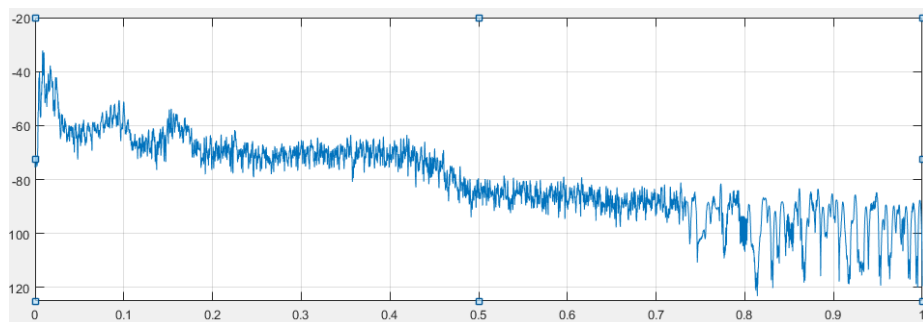


Рис. 2. Робот Inova Maxim (мужской, Google)

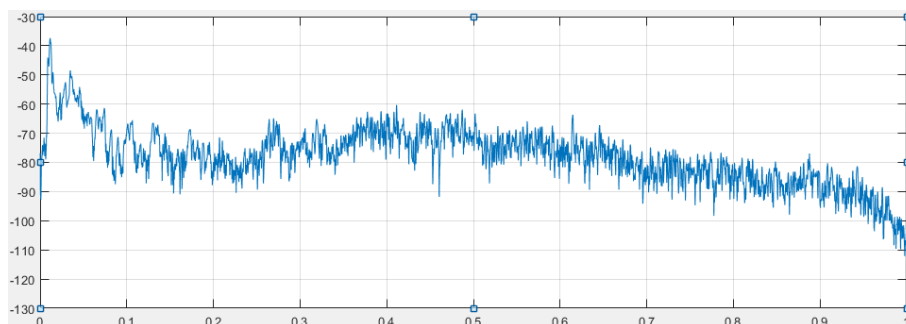


Рис. 3. Естественный голос (женский)

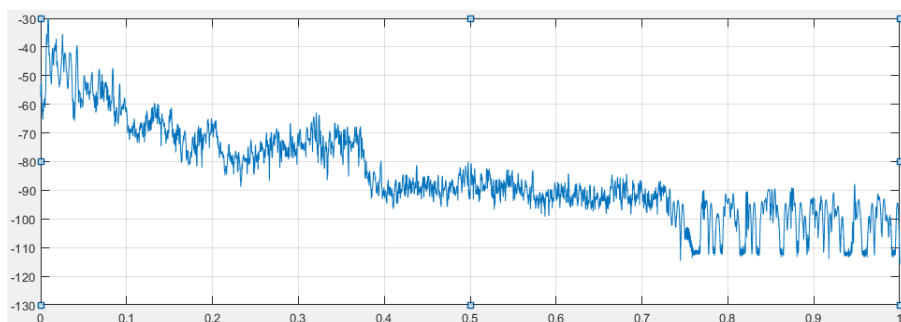


Рис. 4. Робот Google (женский)

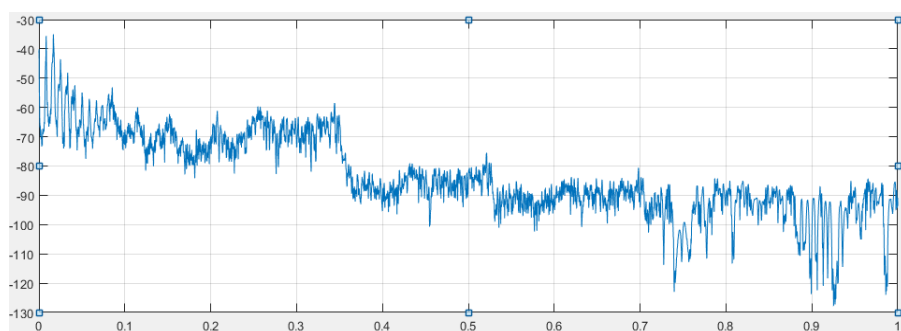


Рис. 5. Робот Yandex (женский)

Рассмотрим кепстры указанных выше звуковых сигналов (рис.6-10).

При практической реализации основной задачей является достижение наглядных результатов, отображающих яркие и явные различия между мужской и женской речью настоящих людей и роботов.

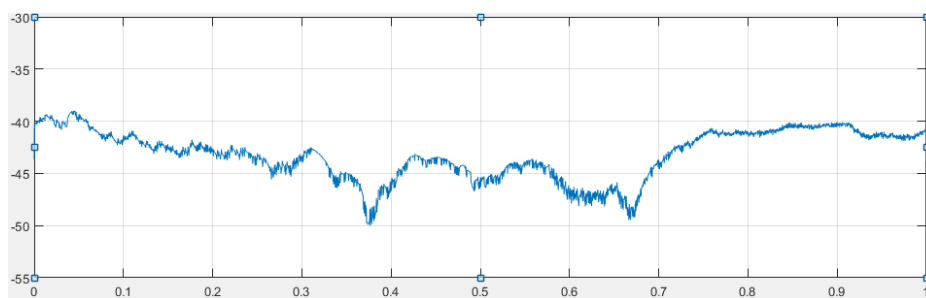


Рис. 6. Естественный голос (мужской, кепстр)

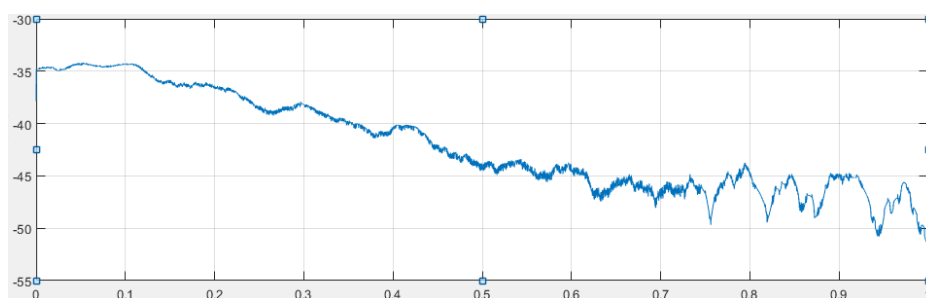


Рис. 7. Робот Inova Maxim (мужской, Google, кепстр)

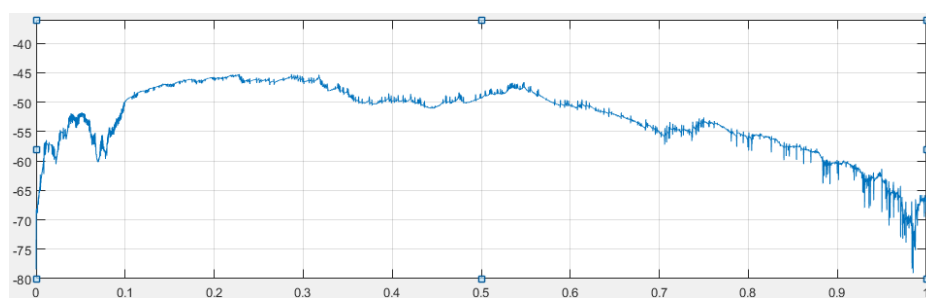


Рис. 8. Естественный голос (женский, кепстр)

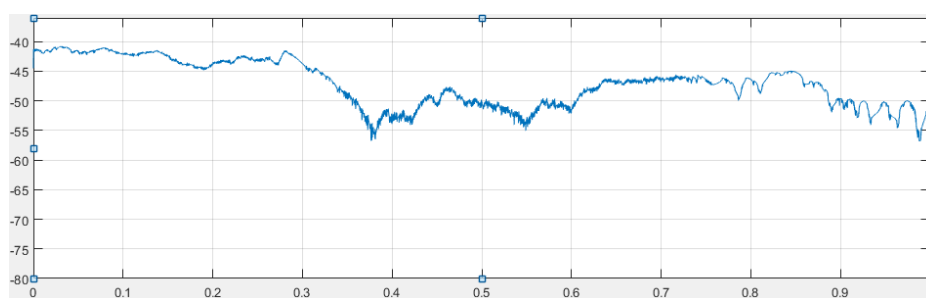


Рис. 9. Робот Google (женский, кепстр)

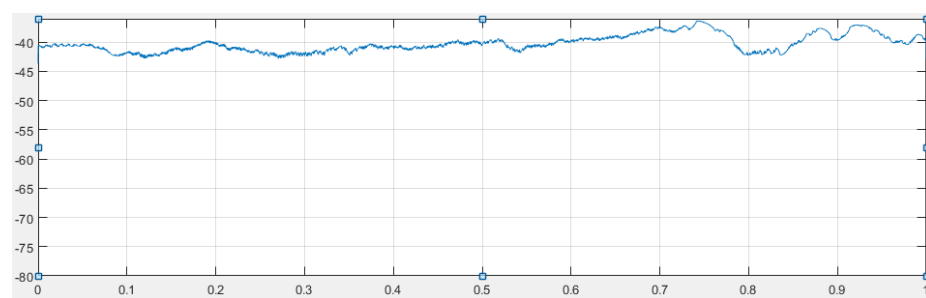


Рис. 10. Робот Yandex (женский, кепстр)

Решение поставленной задачи велось в пакете прикладных программ Matlab, который предоставляет возможность работы с цифровой записью речевых сигналов и достаточно широкий набор специальных разделов для построения и работы с графиками речи.

Видно, что кепстр мужского роботизированного голоса является более гладким, а на конце кепстр робота идёт вниз, тогда как кепстр мужского голоса остаётся практически неизменным.

Кепстры роботизированных женских голосов также являются более гладкими, чем кепстры естественных голосов, особенно это видно в первой трети графиков и если кепстры женских голосов явно убывают, то кепстры роботизированных являются более стабильными.

При сравнении кепстров роботизированных мужских и женских голосов можно сказать, что больше всего похож на естественный кепстр Google.

Таким образом, при проведении кепстрального анализа можно определить, кто говорил в данном случае – робот или человек.

Библиографический список

1. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл-мл., – М. : Мир, 1990. – 584 с.
2. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер – М. : Радио и связь, 1981. – 496 с.
3. Huang, X. Spoken language processing: a guide to theory, algorithm, and system development / X. Huang, A. Acero, H.-W. Hon // PH PTR. – New Jersey, 2001. – 980 p.

МЕТОД ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ ВОЛНАХ АНИЗОТРОПНОГО ВОЛНОВОДА

М. О. Снегур

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: snegur.max15@gmail.com

1. Введение

Для исследования спектральных свойств некоторых задач оказывается естественным и эффективным метод операторных пучков. В работах ([1,2,3,4,5]) в целом построена теория распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) волноводах.

Однако для неоднородных анизотропных волноведущих структур такой теории не построено. В этом случае задача становится значитель-

но сложнее (в силу некомпактности соответствующих операторов). Предложен подход ([6,7]), основанный на сведении задачи к исследованию уже оператор-функции, а не операторного пучка. Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Доказана теорема о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции с конечным дефектом.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкими границами Γ_1 и Γ_2 такими, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Будем рассматривать математическую модель экранированной волноведущей структуры, поперечное сечение которой плоскостью $z = const$ образованно ограниченной областью Ω с границами Γ_1 и Γ_2 . Диэлектрическая проницаемость имеет вид $\epsilon_0 \hat{\epsilon}$

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x(x) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

где $x=(x,y)$. Будем предполагать, что $\epsilon_x \in C^1(\bar{\Omega})$, $\epsilon_z \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\epsilon_x > 1$, $\epsilon_z > 1$, $\text{Im} \epsilon_x = 0$, $\text{Im} \epsilon_z = 0$. Магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$, ϵ_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$\Pi(x, y) := E_z(x, y), \quad \Phi(x, y) := H_z(x, y). \quad (2)$$

Для компонент поля Π и Φ имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений

$$\begin{cases} L_1 \Pi := \Delta \Pi + \kappa^2 \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \Pi = \frac{\gamma^2}{\epsilon_x \kappa^2} \nabla \epsilon_x \nabla \Pi + \frac{\gamma}{\epsilon_x \kappa^2} J(\epsilon_x, \Phi), x \in \Omega \\ L_2 \Phi := \Delta \Phi + \kappa^2 \Phi = \frac{1}{\kappa^2} \nabla \epsilon_x \nabla \Phi - \frac{\gamma}{\kappa^2} J(\epsilon_x, \Pi), x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

$$J(u, v) := \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Зная продольные компоненты поля Π и Φ как решение задачи (3), можно определить поперечные составляющие. Эквивалентность перехода к задаче (3) нарушается лишь при $\gamma^2 = \epsilon_x$; в этом случае требуется отдельное рассмотрение системы (2).

Будем искать решения Π и Φ задачи (3) в пространствах Соболева соответственно $H_0^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$, со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_{\Omega} (\nabla f \nabla \bar{g} + f \bar{g}) dx, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1.$$

2. Вариационное соотношение

Дадим вариационную формулировку задачи (3). Умножим уравнения системы (3) соответственно на пробные функции $\bar{u}$ и $\bar{v}$, считая их пока непрерывно дифференцируемыми в Ω , и применив формулу Грина [9] для области Ω , принимая во внимание краевые условия, правые части уравнений системы (3), складывая выражения и домножив соотношение на γ^2 , получаем вариационное соотношение

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_{\Omega} (\epsilon_z \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx + \int_{\Omega} (\epsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v}) dx - \\ & - \int_{\Omega} \frac{\epsilon_x}{\kappa^2} (\epsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v}) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\kappa^4} (\bar{v} J(\epsilon_x, \Pi) - \bar{u} J(\epsilon_x, \Phi)) dx = 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Определение 1. Пару функций

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \Phi \in H^1(\Omega), (\|\Pi\|_1 + \|\Phi\|_1 \neq 0)$$

Будем называть собственным вектором задачи (3), отвечающим характеристическому числу (х.ч.) $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, если при $\gamma = \gamma_0$ выполнено вариационное соотношение (4) для любых $u \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega)$.

4. Задача о спектре оператор-функции

Пусть $H = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ - декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \quad u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega), u_2, v_2 \in H^1(\Omega).$$

Тогда интегралы, входящие в (4), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на H от аргументов

$$\mathbf{u} = (\Pi, \Phi)^T, \mathbf{v} = (u, v)^T.$$

Эти формы определяют [10] некоторые линейные ограниченные операторы $T: H \rightarrow H$ по формуле

$$t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (T\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H, \quad (5)$$

при условии, что сами формы ограничены: $|t(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|T\mathbf{u}\|^2 = t(\mathbf{u}, T\mathbf{u}) \leq C \|\mathbf{u}\| \|T\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_z \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} (\varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K_2(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (A_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (A_2(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\kappa^4} (\bar{v} J(\varepsilon_x, \Pi) - \bar{u} J(\varepsilon_x, \Phi)) dx = (B(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

Вариационную задачу (4) можно записать в операторном виде

$$(N(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in H$$

или эквивалентно

$$N(\gamma) \mathbf{u} = 0, N(\gamma): H \rightarrow H, \quad N(\gamma) := \gamma^2 K + A_1 - K_1 - A_2(\gamma) + K_2(\gamma) + B(\gamma). \quad (6)$$

Уравнение (6)- операторная запись вариационного соотношения (4). Характеристические числа и собственные векторы $N(\gamma)$ совпадают с

собственными значениями и собственными векторами задачи (3) при $\gamma^2 \neq \varepsilon_x$.

Приведем, следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию $N(\gamma)$ (доказательство в [5]):

Лемма 3. Оператор-функция $N(\gamma)$ являются компактными и голоморфными в области

$$\mathbb{C} \setminus \Lambda_0 \text{ и } \Lambda_0 := \left\{ \gamma : \gamma^2 = \varepsilon_x(x), x \in \bar{\Omega} \right\}.$$

Обозначим через $\rho(N)$ резольвентное множество оператор-функции $N(\gamma)$, т.е. совокупность тех $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых оператор $N(\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Спектр $N(\gamma)$, будем обозначать через $\sigma(N)$; $\sigma(N) = \mathbb{C} \setminus \rho(N)$.

Лемма 4. Существует $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $N(\tilde{\gamma})$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\rho(N) := \left\{ \gamma : \exists N^{-1}(\gamma) : H \rightarrow H \right\}$ оператор-функции $N(\tilde{\gamma})$ не пусто; $\rho(N) \neq \emptyset$.

Теорема 1. Оператор-функция $N(\gamma) : H \rightarrow H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma) : H \rightarrow H$ является дискретным в Λ , т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $K_0 \subset \Lambda$.

Рассмотрим оператор-функцию $N(\gamma)$ в области $\Lambda_\eta = \left\{ \gamma : |\gamma| > \eta \right\}$, где η - произвольное положительное число, такое что $\eta > \max_{x \in \bar{\Omega}} \varepsilon_x$. При этом очевидно, что $\Lambda_\eta \subset \Lambda$.

Теорема 3. Система с.п.в. оператор-функции $N(\gamma)$ отвечающий х.ч. из множества Λ_η двукратно полна с конечным дефектом в $H \times H$:

$$\dim \overline{\text{coker } N\left(\phi_p^{(k,o)}\right)} < \infty \text{ и } \dim \overline{\text{coker } N\left(\phi_p^{(k,1)}\right)} < \infty;$$

здесь $\overline{N\left(\phi_p^{(k,v)}\right)}$ означает замыкание линейной оболочки множества векторов $\left\{ \phi_0^{(k,v)} \right\}$.

Библиографический список

1. Смирнов, Ю. Г. Применение методов операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода / Ю. Г. Смирнов // Доклады АН СССР. – 1990. – 312(3). – С. 597–599.
2. Смирнов, Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений / Ю. Г. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 1. – С. 140–147.

3. Делицин, А. Л. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода / А. Л. Делицин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – 36(5). – С. 629–633.
4. Делицин, А. Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости / А. Л. Делицин // Известия РАН. Серия Математическая. – 2007. – 71(3). – С. 61–112.
5. Смирнов, Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : ИИЦ ПензГУ, 2009.
6. Смирнов, Ю. Г. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин // Дифференциальные уравнения. – 2017. – 53:10. – С. 1298–1309.
7. Смирнов, Ю. Г. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин // Доклады АН. – 2018. – 478(6). – С. 1–4.
8. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
9. Costabel, M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results. / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19(3). – Pp. 613–626.
10. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972.
11. Радзиевский, Г. В. Полнота корневых векторов пучка Келдыша, возмущенного аналитической оператор-функцией $S(\lambda)$ с $S(\infty)=0$. / Г. В. Радзиевский // Математические заметки. – 1977. – 21(3). – С. 391–398.

ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ВНУТРИ БАРАБАННОЙ МЕЛЬНИЦЫ

А. О. Сыромясов

Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет им. Н. П. Огарёва,
г. Саранск, Россия
E-mail: syall@yandex.ru

Введение

В последние несколько лет все более актуальной становится разработка методов промышленного производства наноматериалов [5]. Одним из таких материалов является графитовая смазка. Для ее получения слой графитового порошка насыпается в барабанную мельницу, внутри которой могут перекачиваться одно или несколько тел, играющих роль жерновов [2, 6]. Когда мельница начинает вращаться, тела приходят в движение. Если они скользят по внутренней поверхности барабана, в порошке начинают образовываться пластинки, т.к. происходит механи-

ческое отслоение вещества на наноуровне. Эти пластинки повышают качество производимой графитовой смазки [1]. Следовательно, актуальным является моделирование движения «жерновов» (некоторых тел вращения) внутри барабана мельницы и изучение возможности перехода этого движения в режим скольжения.

В настоящей работе рассматривается простейший случай, когда в мельнице движется единственное тело. Работа является обобщением статьи [3], в которой указанное тело представляет собой шар.

Постановка задачи

Геометрия задачи проиллюстрирована на рис. 1.

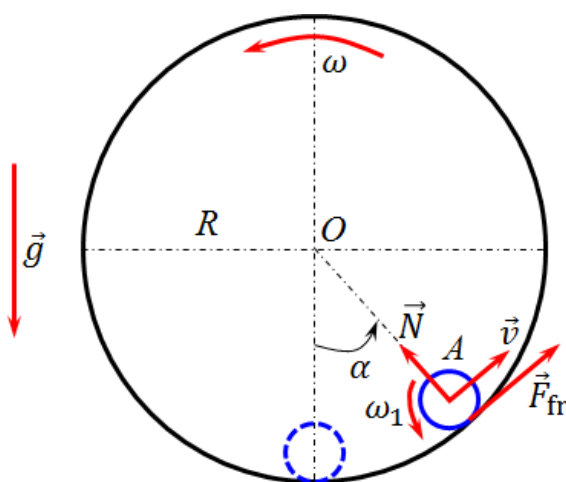


Рис. 1

Двигаясь внутри барабана радиуса R , ролик массы m и радиуса r вращается со скоростью ω_1 вокруг своего центра A . Положение этой точки определяется изображенным на рис. 1 углом α . В свою очередь, сам барабан вращается с угловой скоростью ω .

Легко видеть, что скорость точки A и угол α связаны соотношением

$$v_A = (R - r) \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1)$$

С другой стороны, применяя теорему о движении центра масс [4] в проекции на направление движения точки A и на нормаль к нему, получим

$$m \frac{dv_A}{dt} = F_{\text{fr}} - mg \sin \alpha, \quad m \frac{v_A^2}{R - r} = N - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Здесь и далее g – ускорение свободного падения, N и F_{fr} – силы нормальной реакции и трения скольжения, соответственно. Коэффициент трения тела о барабан обозначим через f .

В начальный момент времени ($t = 0$) сам барабан покоится, а далее двигается с постоянным угловым ускорением ε в течение времени t_m .

После достижения максимального значения $\omega_m = \varepsilon t_m$ угловая скорость барабана неизменна:

$$\omega = \begin{cases} \varepsilon t, & 0 \leq t \leq t_m; \\ \omega_m, & t \geq t_m. \end{cases}$$

Движение тела в барабане может происходить в одном из двух режимов:

без проскальзывания, когда предельное значение силы трения не достигается, а скорость точки барабана, в которой происходит контакт с роликом, равна скорости соответствующей точки ролика:

$$F_{\text{тр}} < fN, \quad v_A + \omega_1 r = \omega R; \quad (3)$$

с проскальзыванием, когда достигается предельное значение силы трения, но точки ролика и барабана, находящиеся в соприкосновении, движутся с разными скоростями:

$$F_{\text{тр}} = fN, \quad v_A + \omega_1 r > \omega R. \quad (4)$$

Наконец, вращение тела описывается теоремой об изменении кинетического момента:

$$I \frac{d\omega_1}{dt} = rF_{\text{тр}}. \quad (5)$$

Здесь $I = \mu m r^2$ – момент инерции ролика, $\mu \in (0; 1]$ – безразмерный параметр.

В момент $t = 0$ тело неподвижно и расположено в нижней точке барабана, поэтому

$$\alpha(0) = 0, \quad N(0) = mg, \quad F_{\text{тр}}(0) = 0, \quad v_A(0) = 0, \quad \omega_1(0) = 0. \quad (6)$$

Тем самым, выполнены условия (3), а значит, некоторое время после начала движения ролик будет двигаться по барабану, не проскальзывая.

В данной статье модель (1)–(6) применялась к исследованию механических систем со следующими конкретными параметрами. Диаметр барабана составлял $2R = 110$ мм, диаметр ролика и его высота – $2r = 5$; 8 или 10 мм. Указанный ролик был изготовлен из стали с плотностью 7860 кг/м^3 , коэффициент f трения о барабан мог быть равен 0.05 или 0.1. Время разгона t_m составляло от 3 до 5 с, а достигаемая при этом максимальная угловая скорость ω_m – от 50 до 250 об/мин.

Требовалось выяснить, возможен ли для такой системы переход к движению с проскальзыванием, и если да, то когда он произойдет – до или после того, как барабан разгонится до максимальной угловой скорости.

Исследование математической модели движения

Из (1) и (2) следует, что независимо от режима движения

$$N = m \left[(R - r) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + g \cos \alpha \right]. \quad (7)$$

Отсюда и из (5) нетрудно вывести, что до начала проскальзывания ролика по барабану угол α подчиняется уравнению

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega^2(\mu) \sin \alpha = K(\mu) \frac{d\omega}{dt}, \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\Omega^2(\mu) = \frac{1}{1+\mu} \frac{g}{R-r}, \quad K(\mu) = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{R}{R-r}.$$

Предположив, что $\alpha \ll 1$, линеаризуем (8). Тогда с учетом начальных данных (6) получается, что в период разгона барабана, когда $t \leq t_m$,

$$\alpha(t) = \frac{K(\mu)\varepsilon}{\Omega^2(\mu)} [1 - \cos \Omega(\mu)t], \quad (9)$$

так что максимальное значение угла отклонения ролика от вертикали равно

$$\alpha_{\max} = \frac{2K(\mu)\varepsilon}{\Omega^2(\mu)} = \frac{2\mu\varepsilon R}{g}. \quad (10)$$

При перечисленных выше конкретных ε, μ, R значения $\alpha_{\max}$ много меньше 1, что оправдывает проведенную линеаризацию.

Из (4) следует, что для перехода к проскальзыванию требуется выполнение неравенства

$$F_{\text{fr}} - fN \geq 0. \quad (11)$$

Используя (7), (9) и оценивая величину N сверху, получим, что такой переход возможен при

$$\frac{R\varepsilon}{g} \geq \frac{1+\mu}{\mu+2\mu^2} f. \quad (12)$$

При стационарном вращении барабана ($t \geq t_m$) угол α удовлетворяет уравнению (8) с нулевой правой частью, при этом $\alpha(t_m) = \beta_0 \leq \alpha_{\max}$. Отсюда после линеаризации уравнения легко получить, что

$$\alpha(t) = \beta_0 \sin(\Omega(\mu)t + \theta), \quad \theta = \text{const.}$$

Теперь из неравенства (11) после оценки N сверху следует, что переход в режим скольжения произойдет при

$$\frac{R\varepsilon}{g} \geq \frac{1+\mu}{2\mu^2} f. \quad (13)$$

При $\mu = 2/5$, что соответствует моменту инерции шара, формулы (12) и (13) переходят в соотношения, выведенные ранее в [3].

Анализ результатов моделирования

Очевидно, что при всех $\mu > 0$ условие (12) является более мягким, чем (13). Это значит, что независимо от распределения массы внутри одиночного тела вращения переход к проскальзыванию если и произойдет, то не при стационарном вращении, а в период разгона барабана.

Рассмотрим систему ограничений $\alpha_{\max} < 1$ и (12). Первым ее следствием служит неравенство $f < 1 - 1/[2(1+\mu)]$.

Оно означает, что с ростом параметра μ и момента инерции ролика диапазон допустимых коэффициентов трения становится шире. Кроме того, из (12) следует, что

$$\frac{\mu R\varepsilon}{g} \geq \frac{1+\mu}{1+2\mu} f.$$

При увеличении μ левая часть этого неравенства растет, а правая – убывает. Это означает, что при увеличении момента инерции ролика условия проскальзывания, накладываемые на R, ε, f , становятся менее жесткими.

Наконец, из формулы (10) следует экспериментальный способ определения момента инерции ролика. Если при таких R, ε, f , что скольжение не наступает, измерять угол максимального отклонения тела от вертикали, то можно найти $\mu = g\alpha_{\max} / (2\varepsilon R)$.

Для достижимости максимального значения угла требуется, чтобы период колебаний ролика внутри барабана был меньше времени, в течение которого осуществляется разгон: $2\pi / \Omega(\mu) < t_m$. После оценки μ сверху отсюда следует, что при проведении эксперимента должно выполняться условие

$$\frac{R-r}{t_m^2} < \frac{g}{8\pi^2}.$$

Заключение

Итак, в ходе исследования получено, что переход в режим скольжения возможен при разгоне барабана. Было выяснено, что чем больше момент инерции ролика, тем более мягкими становятся условия на зна-

чения радиуса барабана, его углового ускорения и коэффициент трения ролика о барабан, при которых такой переход возможен. Т.о., для получения высококачественной графитовой смазки в барабанной мельнице предпочтительным представляется использование в качестве мелющих тел на шаров или сплошных цилиндров, а полых роликов.

Помимо этого, предложен экспериментальный метод измерения момента инерции тела, движущегося внутри барабана.

Библиографический список

1. Аль-Саади, Д. А. Ю. Механоактивация графитовой смазки в высокоскоростной планетарной мельнице / Д. А. Ю. Аль-Саади, В. Ф. Першин, Б. Н. Салимов, С. А. Монтаев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2016. – Т. 22, № 4. – С. 633–641.
2. Першин, В. Ф. Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа / В. Ф. Першин, В. Г. Однолько, С. В. Першина. – М. : Машиностроение, 2009. – 220 с.
3. Сыромясов, А. О. Исследование плоского движения одиночного шарика внутри шаровой мельницы / А. О. Сыромясов, А. И. Попов, В. Ф. Першин // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19. – № 2. – С. 117–125.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2009. – 416 с.
5. Ткачев, А. Г. Промышленные технологии и инновации. Оборудование для наноиндустрии и технология его изготовления : учеб. пособие / А. Г. Ткачев, И. Н. Шубин, А. И. Попов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 132 с.
6. Leon, V. Few-layer graphenes from ball-milling of graphite with melamine / V. Leon, M. Quintana, M. A. Herrero [et al.] // Chem. Commun. – 2011. – Vol. 47. – P. 10936–10938.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЛДС-СИСТЕМЫ

И. Л. Сандлер

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: viruskvam@bk.ru

В статье рассмотрена многомерная динамическая система, имеющая линейную форму разный порядок входов и выходов при условии действия помех, типа белый шум, в выходных сигналах. Исследуется авторегрессионная форма многомерной модели при различных отношениях «помеха-сигнал».

Динамическая модель описывается следующим уравнением с дискретным временем $i = \dots -1, 0, 1, \dots$ (1):

$$z_i^{(n)} - \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nn}} b_0^{(mn)}(n) z_{i-m}^{(n)} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^k \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^{(l)} + \xi_2^{(n)}(i),$$

$$y_i^{(l)} = z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i) \quad (1)$$

где $n = \overline{1, k}$, $y_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые выходные сигналы, $l = \overline{1, k}$; k – число выходных переменных; $b_0^{(ml)}(n)$ – параметры линейного разностного уравнения; $\xi_1^{(l)}(i)$ – помеха наблюдений в l -ом выходном сигнале.

Для моделирования необходимо выполнение ограничений, приведенный в работах [1-3]. Оценки неизвестного вектора параметров $\hat{b}_i(n)$ получены с помощью стохастически градиентного алгоритма [4, 5]:

$$\left| \hat{b}_{i+1}(n) \right| = \left| \hat{b}_i(n) \right| - \alpha_i \nabla_{|b(n)|} \left[\frac{\left(y_{i+1}^{(n)} - \hat{b}_i(n) \cdot Y_{\bar{r}_{nk}}(i+1) \right)^2}{\omega(\hat{b}_i(n))} \right], \quad (2)$$

$$\text{где } 1 + \gamma^{(n)} + b_i^T(n) \frac{D_1(n)}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} b_i(n) = \omega(\hat{b}_i(n)).$$

Для исследования сходимости, при различных отношениях “помеха – сигнал”, разработанного рекуррентного алгоритма (2), динамическая система разного порядка, описываемая следующим уравнением:

$$z_i^{(1)} = 1.1z_{i-1}^{(1)} - 0.6z_{i-2}^{(1)} - 0.2z_{i-1}^{(2)} + 1.1z_{i-2}^{(2)} + \xi_2^{(1)}(i)$$

$$z_i^{(2)} = 0.6z_{i-1}^{(2)} - 0.8z_{i-2}^{(2)} - 0.6z_{i-1}^{(1)} + \xi_2^{(2)}(i), \quad y_i^{(l)} = z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i) \quad (3)$$

Число выходных переменных $k = 2$, порядок выходных сигналов модели: по первому выходу $\bar{r}_{11} = 2$, $\bar{r}_{12} = 2$ по второму выходу $\bar{r}_{21} = 2$, $\bar{r}_{22} = 1$.

Помеха в выходном сигнале генерируется командой *normrnd* для нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Начальные значения параметров линейной динамической системы равны 0.

Из полученных результатов видно, что при увеличении дисперсионного отношения «помеха-сигнал» для разных выходов динамической

системы стохастический градиентный алгоритм показывает наилучшие результаты по сравнению с методом наименьших квадратов и методом инструментальных переменных. Дальнейшем развитием работы является исследование при автокоррелированных помехах [6-9].

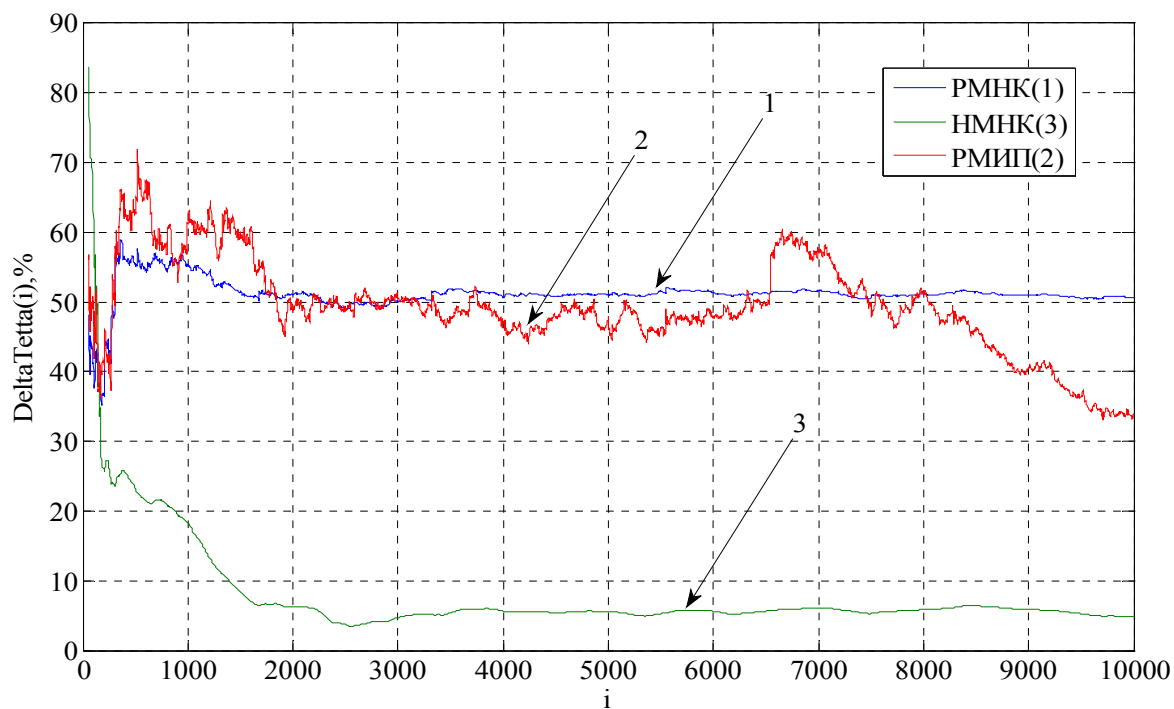


Рис. 1. Графики относительных погрешностей первого выхода при $\sigma_1^{(n)} / \sigma_z^{(n)} = 0,5$

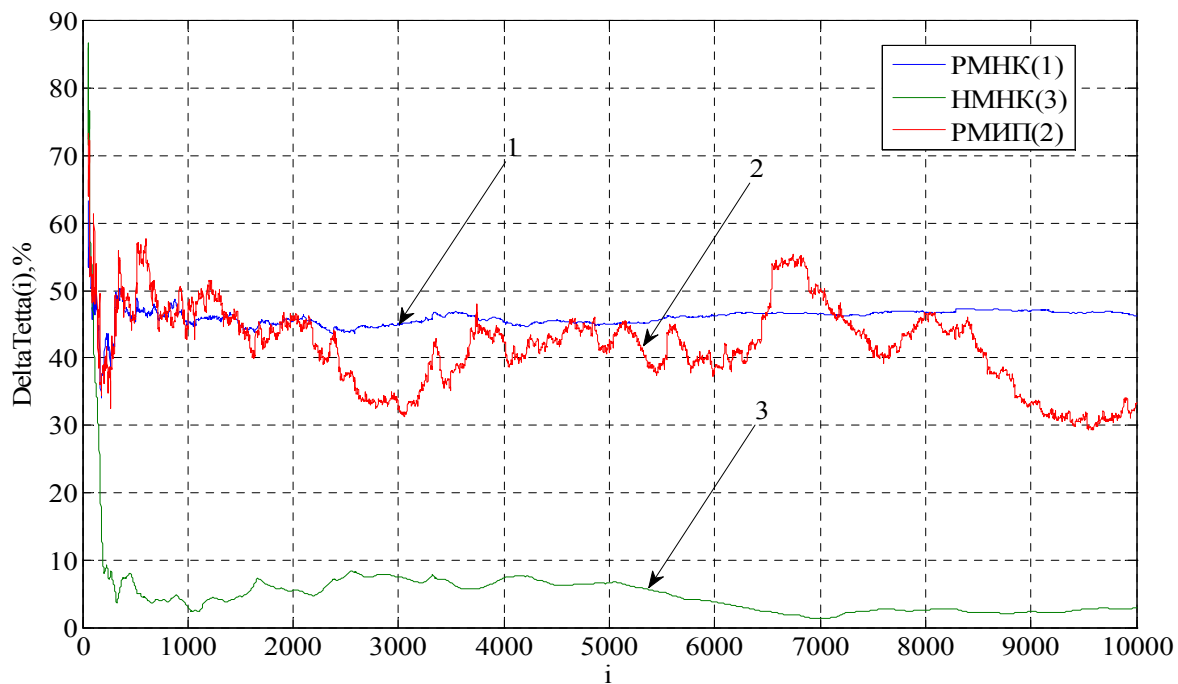


Рис. 2. Графики относительных погрешностей второго выхода при $\sigma_1^{(n)} / \sigma_z^{(n)} = 0,5$

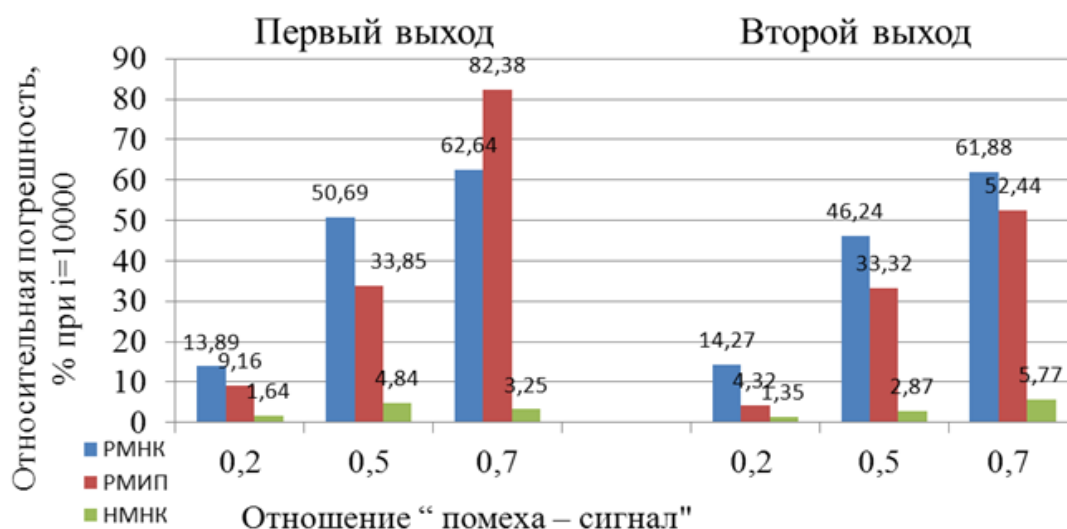


Рис. 3. Графики относительных погрешностей при различных $\sigma_{1,2}^{(n)} / \sigma_z^{(n)}$

Библиографический список

1. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров многомерных линейных динамических систем с помехами наблюдений в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Наука и образование транспорту. – 2014. – № 1. – С. 205–207.
2. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров многомерных линейных динамических систем с ошибками по выходу / И. Л. Сандлер, О. А. Кацюба // Математические методы в технике и технологиях. – 2013. – № 2. – С. 45–46.
3. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров авторегрессии многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехой в выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – Т. 53, № 3.1. – С. 164–167.
4. Сандлер, И. Л. Рекуррентная идентификация параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Вестник транспорта Поволжья. – 2012. – № 2. – С. 68–74.
5. Сандлер, И. Л. Тестирование рекуррентного алгоритма оценивания параметров многомерной линейной динамической системы с помехами / И. Л. Сандлер // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3, № 5-2 (16-2). – С. 117–121.
6. Сандлер, И. Л. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 14–27.
7. Сандлер, И. Л. Рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной линейной динамической системы разного порядка при наличии нестационарных автокоррелированных помех в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Identification systems. Theory and applications Proceedings of the

International scientific and practical conference. Publishing House Science and Innovation Center, Ltd.. 2015. – С. 11–16.

8. Sandler, I. L. Recursive estimation of autoregression parameters multivariate linear discrete dynamical systems of different orders in the presence nonstationary autocorrelated noise in the output signal / I. L. Sandler // Innovation and quality in information technology and data analysis: Proceedings of the International scientific and practical conference. – 2016. – С. 129–132.

9. Сандлер, И. Л. Рекуррентное моделирование авторегрессионной модели многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы с автокоррелированными зашумленными выходными сигналами / И. Л. Сандлер // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф.; под ред. И. В. Бойкова. – 2016. – С. 150–155.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ НА РАБОТУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРЕМНИЕВОЙ ЛИНЗЫ ФРЕНЕЛЯ С ВЫСОКОЙ ЧИСЛОВОЙ АПЕРТУРОЙ В ТЕРАГЕРЦОВОМ ДИАПАЗОНЕ¹

Л. В. Яблокова

Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С. П. Королева,
г. Самара, Россия
E-mail: lyablokova@gmail.com

Введение

Широкое использование электромагнитного излучения терагерцового диапазона в практике научных исследований до недавнего времени сдерживалось отсутствием простых и надежных когерентных источников соответствующих полей и сложностью их селективного детектирования. Прогресс в данной области, связанный с преодолением указанных проблем на рубеже тысячелетий, позволил открыть для применения терагерцовых полей такие фундаментальные отрасли науки как спектроскопия, астрономия и томография. Сейчас поисковые исследования ведутся в сфере применения терагерцовых волн для передачи информации (в том числе между космическими объектами), эллипсометрии, голографии, схемотехники.

Особый интерес представляет расчет и создание элементов для управления излучением новосибирского лазера на свободных электро-

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-47-630560-п_а.

нах (NovoFEL) [1], являющегося самым мощным источником терагерцового излучения. К настоящему времени для него известны фокусирующие элементы в виде бинарных дифракционных линз из кремния [2,3], характеризующихся известными достоинствами и недостатками бинарной оптики. В целом, дифракционные элементы выгодно отличаются от рефракционных [4] значительно меньшей толщиной, высокой лучевой стойкостью (особенно важной при работе с мощными источниками излучения и следующей из многократного уменьшения толщины), большей технологичностью в использовании и изготовлении. Однако, фокусирующим элементам с упомянутым в [2,3] бинарным рельефом свойственна невысокая эффективность (зачастую не превышающая 40% [4]), при которой большая часть энергии освещающего пучка не попадает в область фокусировки. Учитывая мощность рассматриваемого источника [1] это еще и достаточно опасно.

Вместе с тем давно известны дифракционные элементы с непрерывным профилем, свободные от указанного недостатка. Более того, расчету собственно бинарной линзы традиционно [4] предшествует расчет линзы Френеля, таким элементом являющейся. Из ее профиля, квантованием, и выделяется бинарный рельеф. Задача формирования непрерывного рельефа на кремниевой пластине технологически еще не решена окончательно, процессы механической и химической обработки кремния считаются достаточно грубыми для получения непрерывного профиля с необходимой точностью. Однако успехи в плазменном травлении алмазной поверхности (не уступающей кремниевой в твердости и инертности к разного рода воздействиям) [5] позволяют надеяться на скорое совершенствование технологии реактивно-ионного травления кремния, продемонстрированной пока при изготовлении бинарного рельефа [6]. Кроме того, уместно стимулировать развитие технологий опережающими успехами в области математического моделирования. В силу перечисленных особенностей, предлагаемое исследование посвящено моделированию работы кремниевой цилиндрической линзы Френеля, предназначенной для фокусировки терагерцового излучения. Особенностью публикации является учет технологических погрешностей изготовления указанного элемента.

Исследование кремниевой линзы Френеля

В качестве инструмента для расчета дифракции на различных кремниевых линзах выбрана модель, численный метод и программный комплекс, представленные в [7-9] и основанные на совместном разностном решении уравнений Максвелла с использованием блочного алгоритма организации вычислений. Следуя за [2,3,6] примем показатель преломления кремния $n=3,42$ для длины волны $\lambda=141$ мкм, к которой далее приведем все расстояния. Так, апертуру рефракционной линзы по-

ложим равной $101,74\lambda$, толщину и радиус кривизны $10,33\lambda$ и $130,41\lambda$ соответственно. Тогда, согласно геометрической оптике [10], область фокусировки будет расположена на расстоянии $f=50,87\lambda$ от правого полюса.

При расчете линзы Френеля традиционно принято полагать высоту ее рельефа равной $h=\lambda/(n-1)$, что неприемлемо в данном случае. Для линзы с такой высокой числовой апертурой половина ее зон Френеля будет по ширине меньше длины волны, в силу чего работа элемента оказывается решительно непредсказуемой. Приняв $h=2,07\lambda$, была рассчитана собственная линза Френеля (рис. 1), состоящая из 5 зон, крайняя из которых характеризуется приемлемой шириной в $5,18\lambda$.

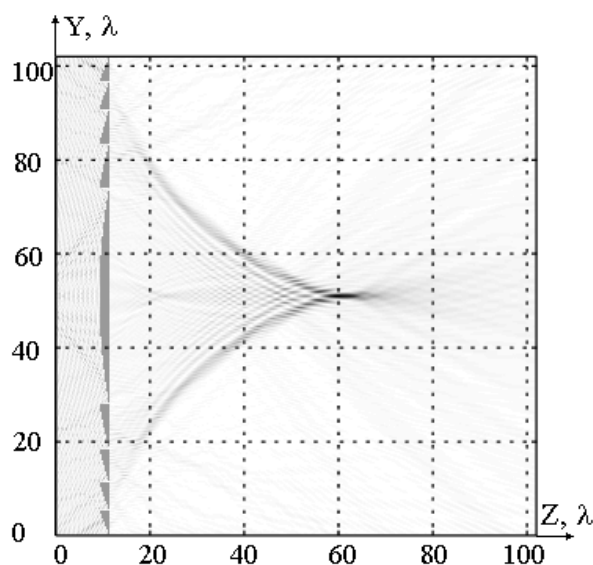


Рис. 1. Распределение интенсивности в вычислительной области для линзы Френеля без технологических погрешностей изготовления

На рис. 1 демонстрируется фокусировка данной линзой падающего слева направо излучения; на рис. 2 заметно некоторое падение значения интенсивности I (нормированной на интенсивность падающего пучка) для обсуждаемой линзы по сравнению с рефракционной. Интенсивность после первой составляет $\delta=0,9$ от значения интенсивности после второй в координатах максимумов. Последние сдвинуты на $4,73\lambda$ и $\delta=2,47\lambda$ влево для рефракционной и дифракционной линз соответственно.

Учет влияния технологических погрешностей изготовления

Особый интерес представляет моделирование элементов с технологическими погрешностями изготовления [11], тем более, что для кремниевых элементов таких исследований еще не проводилось. Пусть ошибка по высоте связана с перетравом поверхности пластинки (рис. 3), приводящем к неравномерному увеличению высоты профиля.

На рис. 3 значение обсуждаемой величины принято равным λ для лучшей наглядности, далее же рассмотрим более реальные меньшие

значения (табл. 1). Действительно, для отработанного технологического процесса максимальная ошибка по высоте вряд ли будет превышать 10%.

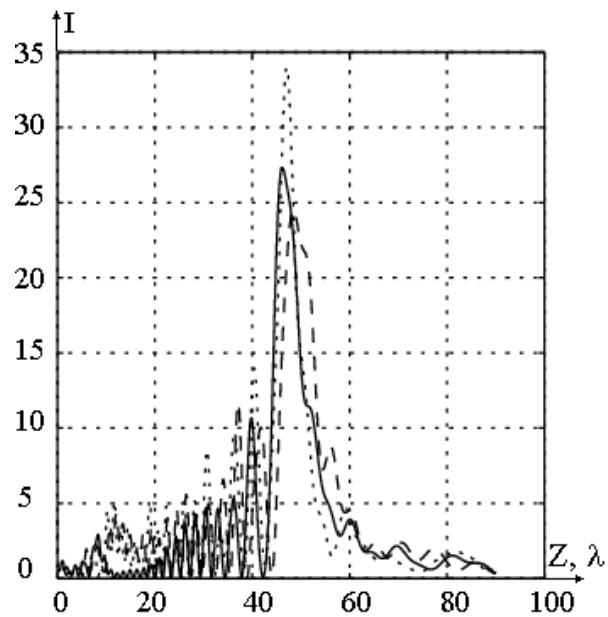


Рис. 2. Распределения интенсивностей на главной оптической оси за правым полюсом для рефракционной (непрерывная кривая) линзы, линзы Френеля без технологической погрешности (пунктир) и с таковой в $0,15\lambda$ (точки)

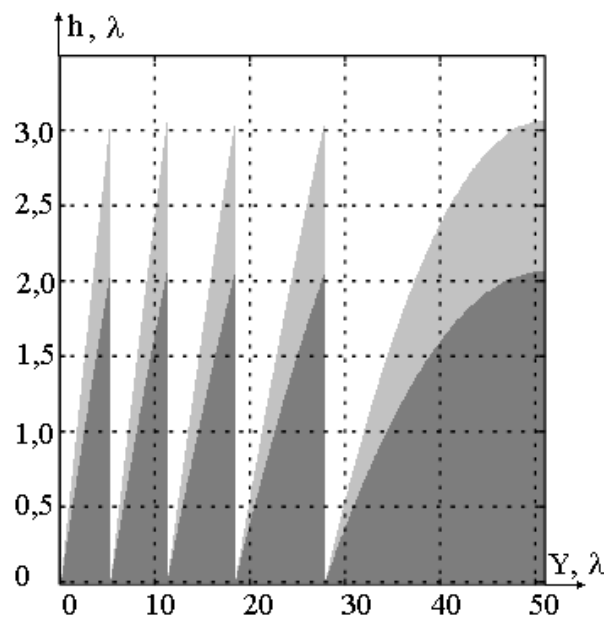


Рис. 3. Расчетный профиль линзы Френеля (тёмный) и профиль с технологической погрешностью изготовления (тёмный и светлый) при максимальной ошибке по высоте в λ

Результаты моделирования работы линз Френеля с технологическими ошибками изготовления, представленные в табл. 1, оказались не-

сколько неожиданными. Естественное предположение о негативном влиянии ошибок по высоте профиля на эффективность фокусировки оправдались лишь для достаточно больших значений ошибки, превышающих четверть длины волны.

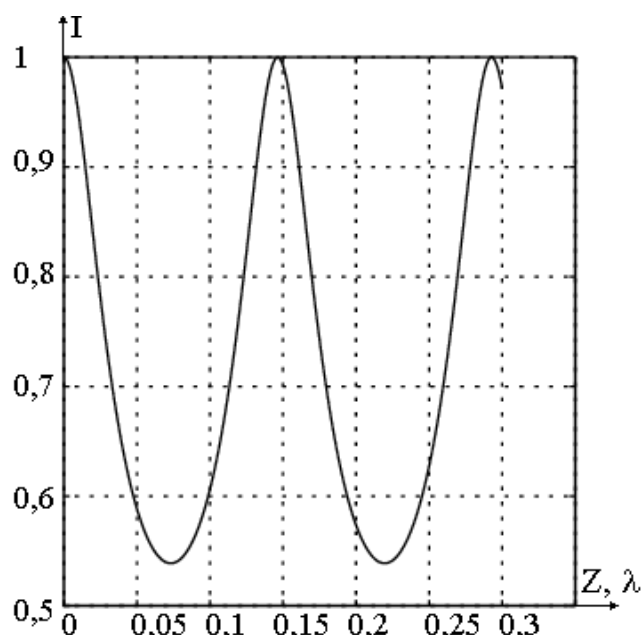


Рис. 4. Зависимость пропускания плоско-параллельной кремниевой пластинки от толщины

Таблица 1

Характеристики исследуемых линз с погрешностями изготовления

Характеристики	Ошибка по высоте профиля					
	0,05λ	0,1λ	0,15λ	0,2λ	0,25λ	0,3λ
$I_{\max}$	24,86	24,74	34,03	28,98	23,93	21,07
f	47,54	47,15	47,05	46,82	46,96	46,42
δ	0,91	0,91	1,25	1,06	0,88	0,77

Отклонение же в $0,15\lambda$ (рис. 2, табл. 1) привело к росту интенсивности в области фокусировки на четверть по сравнению с рефракционной линзой. Возможно, это связано с высоким коэффициентом френелевского отражения кремния, а, следовательно, со значительными флуктуациями интенсивности прошедшей волны при незначительном изменении высоты профиля. Любопытно, что для плоско-параллельной пластинки (рис.4) максимум интенсивности пришелся также на ширину в $0,15\lambda$.

Заключение

Технологические ошибки изготовления непрерывного профиля цилиндрической кремниевой линзы Френеля с высокой числовой апертурой, работающей в терагерцовом диапазоне, могут значительно ска-

заться на эффективности фокусировки, приводя в некоторых случаях к ее существенному росту.

Библиографический список

1. Knyazev, B. A. Novosibirsk terahertz free electron laser: instrumentation development and experimental achievements / B. A. Knyazev, G. N. Kulipanov, N. A. Vinokurov // *Measurement Science and Technology*. – 2010. – Vol. 21. – P. 13.

2. Агафонов, А. Н. Кремниевые дифракционные оптические элементы для мощного монохроматического терагерцового излучения / А. Н. Агафонов, Б. О. Володкин, А. К. Кавеев, Б. А. Князев, Г. И. Кропотов, В. С. Павельев, В. А. Сойфер, К. Н. Тукмаков, Е. В. Цыганкова, Ю. Ю. Чопорова // *Автоматрия*. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 98–105.

3. Агафонов, А. Н. Дифракционные линзы для мощных пучков терагерцового излучения / А. Н. Агафонов, М. Г. Власенко, Б. О. Володкин, В. В. Герасимов, А. К. Кавеев, Б. А. Князев, Г. И. Кропотов, В. С. Павельев, И. Г. Пальчикова, В. А. Сойфер, М. Ф. Ступак, К. Н. Тукмаков, Е. В. Цыганкова, Ю. Ю. Чопорова // *Известия РАН, Серия физическая*. – 2013. – Т. 77, № 9. – С. 1360–1362.

4. Дифракционная компьютерная оптика / Д. Л. Головашкин, Л. Л. Досколович, Н. Л. Казанский, В. В. Котляр, В. С. Павельев, Р. В. Скиданов, В. А. Сойфер, С. Н. Хонина : под ред. В. А. Сойфера. – М. : Физматлит, 2007. – 736 с.

5. Karlsson, M Diamond micro-optics: microlenses and antireflection structured surfaces for the infrared spectral region / M. Karlsson, F. Nikolajeff // *Optics Express*. – 2003. – Vol. 11, № 5. – Pp. 502–507.

6. Агафонов, А. Н. Управление поперечно-модовым составом терагерцового лазерного излучения с помощью элементов бинарной кремниевой оптики / А. Н. Агафонов, Б. О. Володкин, А. К. Кавеев, Б. А. Князев, Г. И. Кропотов, В. С. Павельев, К. Н. Тукмаков, Ю. Ю. Чопорова // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 763–769.

7. Булдыгин, Е. Ю. Совместное разностное решение уравнений Даламбера и Максвелла. Двумерный случай // Е. Ю. Булдыгин, Д. Л. Головашкин, Л. В. Яблокова // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 20–27.

8. Яблокова, Л. В. Блочные алгоритмы совместного разностного решения уравнений Даламбера и Максвелла / Л. В. Яблокова, Д. Л. Головашкин // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 320–327.

9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017613903 «Совместное разностное решение уравнений Даламбера и Максвелла».

10. Бутиков, Е. И. Оптика / Е. И. Бутиков. – СПб. : Невский диалект, 2003. – 480 с.

11. Golovashkikn, D. L. Studying fabrication errors or the diffraction grating on the end face of a silver-halide fiber / D. L. Golovashkikn, A. V. Volkov, V. A. Erolov, N. L. Kazanskiy, S. V. Karpeev, O. Y. Moiseev, V. S. Pavelyev, V. G. Artushenko, V. V. Kashin // *Optical Memory & Neural Networks (Information Optics)*. – 2007. – Vol. 16, № 4. – Pp. 263–268.

ПРОБЛЕМЫ СОХРАНЕНИЯ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АУДИО-И ВИДЕОСТЕГОКОНТЕЙНЕРА

М. Р. Сангинова, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

В настоящее время в связи с ростом объемов информации и увеличением пропускной способности каналов связи все большую актуальность приобретает вопрос сокрытия информации в видеопоследовательностях.

Прежде всего, на данном этапе технологий, рассматривается разработка математических моделей мультимедийных контейнеров: речи, изображений, видео. Большой поток исследований в этой области, связанный с разработкой алгоритмов сжатия информации, не привели пока к появлению конструктивных универсальных моделей, но анализ, доступных методов, дает возможность создания индивидуальных алгоритмов кода шифрования данных в видео.

В стегоанализе необходимо введение в рассмотрение иных, чем всеми любимый хи-квадрат, критериев проверки статистических гипотез. Для тестирования качества последовательностей, генерируемых псевдослучайным генератором случайных чисел, в настоящее время известны десятки различных критериев, на основе которых можно создать некоторый новый метод.

Следовательно, самый простой и распространенный способ скрыть информацию в аудио-видео файле может быть основан на том, что в мультимедийных форматах всегда есть определённая избыточность, т.е. в звуковой, графический файл или видеопоток можно вставить определённую информацию, которая на качество воспроизведения практически не повлияет.

Существуют три способа встраивания информации в аудиосигналы:

- встраивание с расширением спектра (незначительно модифицируются амплитуды отсчетов);
- встраивание за счет модификации фазы аудиосигнала (фаза начального сегмента сигнала модифицируется согласно внедряемым данным, фаза последующих сегментов согласовывается с фазой начального сегмента для сохранения разности фаз);
- встраивание за счет изменения времени задержки эхо-сигнала.

Аналогично, существуют три способа внедрения информации в файлы формата MPEG-2:

- встраивание на уровне коэффициентов;
- встраивание на уровне битовой плоскости;
- встраивание за счет энергетической разницы между коэффициентами.

В данной работе были рассмотрены методы сокрытия информации в аудио записях, методы встраивания информации в видеофайлы формата MPEG-2, а также была произведена попытка объединения этих методов для возможности встраивания информации и в видеоряд, и в аудиопоток одного и того же файла одновременно. Рассматриваются особенности хранения аудиосигнала в видеофайлах и приводятся методы, использующие этот сигнал для сокрытия информации. Исследуются возможности компрометации реализованных алгоритмов с помощью методов статистического анализа.

Одним из использованных методов встраивания данных в аудиопоток является LSB (Least Significant Bit, наименьший значащий бит) — суть этого метода заключается в замене последних значащих битов в контейнере (изображения, аудио или видеозаписи) на биты скрываемого сообщения. Разница между пустым и заполненным контейнерами должна быть не ощутима для органов восприятия человека. Методы LSB являются неустойчивыми ко всем видам атак и могут быть использованы только при отсутствии шума в канале передачи данных. Обнаружение LSB-кодированного стего осуществляется по аномальным характеристикам распределения значений диапазона младших битов отсчётов цифрового сигнала.

Экспертным методом удалось определить, что при применении метода LSB осуществляется стегонаграфирование сигнала без потерь, что обуславливает безупречное качество восстановленного сигнала, в то время как метод СРД с ЧПС, ввиду своих особенностей, осуществляет внедрение информации с потерей информационных составляющих, обусловленной наличием в выбранных частотных областях шумов, а также просачиванием малой доли энергии за пределы выбранного частотного диапазона. Однако разборчивость речи безусловно сохраняется.

Поскольку на самом деле человек в состоянии принимать огромные потоки информации, но сознательно он способен обрабатывать лишь около 100 бит/с информации, можно говорить о присущей аудиосигналам существенной избыточности. Методами устранения психофизической избыточности можно обеспечить сжатие цифровых аудиоданных в 10 - 12 раз без существенных потерь в качестве. Алгоритмы lossy- и lossless-компрессии (с потерей и без потери качества соответственно) принципиально отличаются друг от друга. Если lossy-алгоритмы после преобразования Фурье работают с привычными для нас звуковыми волнами, то все lossless-кодировщики понятия не имеют о том, что длинный набор чисел на входе может быть представлен в виде волны с амплитудой и периодом. Их задача — исключительно математическими метода-

ми упаковать информацию поплотнее так, чтобы она могла быть в точности восстановлена впоследствии. Во многом алгоритмы lossless-сжатия схожи с алгоритмами обычных архиваторов. Но архиваторы ориентированы на сжатие любой информации, lossless-кодеки же обладают некоторой спецификой, которая позволяет им лучше справляться со своей прямой задачей — компрессией звука.

Основной принцип встраивания данных в стегоконтейнер можно описать следующим образом. Пусть сигнал контейнера представлен последовательно-стью из бит. Процесс скрытия информации начинается с определения бит контейнера, которые можно изменять без внесения заметных искажений — стегопути. Далее среди этих бит обычно в соответствии с ключом выбираются биты, заменяемые битами цифровых водяных знаков (ЦВЗ), в качестве которых может выступать также и текст сообщения.

Выделяют следующие способы внедрения в контейнер битов ЦВЗ:

1. Инверсия бита. Значения битов стегопути заменяются на противоположные. При этом «1» может соответствовать замене 0->1, «0» - замена 1->0;

2. Вставка бита. Перед битом стегопути вставляется бит ЦВЗ. При этом значение бита ЦВЗ должно быть противоположно значению бита контейнера;

3. Удаление бита. Выбираются пары «01» или «10» битов стегопути, соответствующие разным значениям бита ЦВЗ. Затем первый бит пары удаляется;

4. Использование бита-флага. При этом на то, что очередной бит контейнера (неизменяемый!) является битом ЦВЗ указывает инверсия предшествующего бита-флага;

и ряд других, менее существенных для данной работы.

Стеганографические методы, применяемые для встраивания информации в видео, сжатое по стандарту MPEG-2, должны работать в реальном времени, при этом необходимо, чтобы ЦВЗ встраивались непосредственно в поток сжатых данных, чтобы избежать лишних вычислений.

При сжатии видеопотока с потерей данных принято выделять два основных направления.

1) Сжатие с естественной потерей качества. JPEG, MPEG и другие технологии сжатия с потерей качества иногда сжимают, переступая за грань сжатия без потерь с точки зрения восприятия видеoinформации. Тем не менее, сжатые видео - и статические изображения вполне приемлемы для адекватного восприятия их человеком. Иными словами, в данном случае наблюдается так называемая естественная деградация изображения, при которой теряются некоторые мелкие детали сцены. Похожее может происходить и в естественных условиях, например при дожде

или тумане. Изображение в таких условиях, как правило, различимо, однако уменьшается его детализация.

2) Сжатие с неестественными потерями качества. Низкое качество сжатия, в значительной степени искажающее изображение и вносящее в него искусственные (не существующие в оригинале) детали сцены, называется неестественным сжатием с потерей качества. Примером тому может служить некоторая «блочность» в сильно сжатом MPEG-е и в некоторых других компрессорах. Неестественность заключается в первую очередь в нарушении самых важных с точки зрения восприятия человеком характеристик изображения — контуров. Опыт показывает, что именно контуры позволяют человеку правильно идентифицировать тот или иной визуальный объект.

Основной задачей стегоанализа является определения факта наличия скрытого сообщения в предполагаемом контейнере. Основные типы современных атак на видеоконтейнер можно разделить на:

1) перекодирование видео с использованием алгоритмов сжатия с потерями;

2) изменение порядка кадров исходной видеопоследовательности (частный случай – удаление одного или нескольких кадров);

3) геометрические преобразования (всевозможные аффинные преобразования).

В результате проделанной работы была рассмотрена математическая модель стегосистемы и атака преобразований на данной модели. Продемонстрирована математическую модель стеганографирования на основе частотных представлений сигнала. Предложенный метод был реализован в программной среде Visual Studio 2012. Показана двоичная стегосистема передачи кодированных данных. Проводится анализ, сравнение и обобщение этих методов для других видеоформатов. Кроме того был приведен:

- Построение декодера стегосистемы
- Использование контейнера как ключа стегосистемы

Рассматриваются особенности хранения аудиосигнала в видеофайлах. В целях анализа современного развития данного направления стеганографии был проведен поиск и исследование работы программ, реализующих сокрытие информации. Исследуется случай малого искажения изображения при кодировании, показана погрешность передачи изображения. Были проведены вычислительные эксперименты, сделаны необходимые выводы для дальнейшего устранения ошибок кода. На основе анализа методов, были получены первые результаты кодирования и почти решена проблема погрешности.

В заключение необходимо отметить, что поставленная в начале работы цель была полностью достигнута, все поставленные задачи реализованы на данном этапе.

В перспективе возможно

- улучшение быстродействия алгоритма за счет разработки собственных функций на языке C++, C#
- разработка прототипа программного продукта реализующего данный метод без погрешности

Библиографический список

1. Ковалгин, Ю. А. Цифровое кодирование звуковых сигналов / Ю. А. Ковалгин, Э. И. Вологодин. – СПб. : КОРОНА-принт, 2004. – 240 с.
2. Кирн, Питер. Цифровой звук. Реальный мир / Питер Кирн; пер. с англ – М. : И.Д. Вильямс, 2008. – 720 с.
3. Рахимов, Р. Г. Компьютерные технологии в музыке / Р. Г. Рахимов. – Уфа : Вагант, 2007. – 39 с.
4. Сергиенко, В. С. Сжатие данных, речи, звука и изображений в телекоммуникационных системах : учеб. пособие / В. С. Сергиенко, В. В. Баранов. – М. : РадиоСофт, 2011 – 360 с.
5. Сэломон, Д. Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон. – М. : Техносфера, 2004. – 368 с.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А. С. Дворянкин, Е. В. Грозная, Н. В. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

e-mails: dvrnkn58@gmail.com, kedrel@mail.ru, 89875083153@yandex.ru

1. Введение

Во все времена с большим интересом относились к численным методам решения задач о распространении, рассеивании электромагнитных и акустических волн. Особый интерес представляет поведение волн в их коротковолновой части, а именно диапазон порядка нескольких сантиметров и миллиметров. Подобные задачи отличаются высокими требованиями к точности расчетов и характеристикам системы. На первое место в данных задачах выходит дифракционное взаимодействие волн. Подобные задачи широко распространены при исследовании и разработке волноводных резонаторов, проектировании многоканальных фильтров и линий передач, а также при проектировании устройств передачи и преобразования электромагнитной энергии. Суть математического моделирования процессов, протекающих в указанных ранее системах, сводится к построению и решению различных краевых задач для уравнения Гельмгольца [1-5,7].

Среди методов решения уравнений Гельмгольца выделяют метод поперечных сечений, метод частичных областей (исследование рассеяния на ступенчатом стыке двух волноводов), конечно-разностные методы и различные проекционные методы. Ниже остановимся подробнее на одном из них.

2. О постановках краевых задач

Рассмотрим уравнение

$$\Delta\omega = a_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial \omega}{\partial t} + a_2 \omega \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные. При $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ оно представляет телеграфное уравнение. При $a_1 = a_2 = 0, a_0 > 0$ оно переходит в волновое уравнение, при $a_0 = a_2 = 0, a_1 > 0$ – в уравнение теплопроводности и диффузии, при $a_0 = 0, a_1 > 0, a_2 \neq 0$ – в уравнение диффузии для среды, в которой происходят химические или цепные реакции.

Руководствуясь методом разделения переменных будем искать решение уравнения (1), имеющие вид

$$\omega(x, t) = u(x)v(t) \quad (2)$$

где $u(x)$ – функция только пространственных координат, а $v(t)$ – функция только времени. Подставив выражение (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{1}{u} \Delta v = \frac{1}{v} \left(a_0 \frac{d^2 v}{dt^2} + 2a_1 \frac{dv}{dt} + a_2 v \right)$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от t , а правая – от координат точки x , то должно быть

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (3)$$

$$a_0 \frac{d^2 v}{dt^2} + 2a_1 \frac{dv}{dt} + (a_2 - k^2)v = 0 \quad (4)$$

где k^2 – некоторое число.

Уравнение эллиптического типа (3) называют уравнением Гельмгольца. Оно играет важную роль в математической физике ввиду своей простоты и большого значения приводящих к нему проблем (волновые процессы, теплопроводность, диффузия и др.).

Из формулы (2) следует, что уравнение Гельмгольца непосредственно определяет меняющуюся от точки к точке интенсивность процессов, происходящих во всех точках изучаемой области по одному и тому же временному закону. В частном случае, когда функция v посто-

янна, оно определяет статическое состояние. Суперпозицией решений вида (2) можно охватить практически любые пространственно-временные зависимости.

Возможность построить любую временную зависимость (удовлетворяющую лишь некоторым общим требованиям) путем суперпозиции решений вида В) сохранится, если вместо произвольных функций $v(t)$ рассматривать только функции, образующие в совокупности полную систему. Поэтому, без ограничения общности, вместо подстановки (2) можно рассматривать подстановку, соответствующую гармоническим колебаниям с меняющейся от точки к точке амплитудой и фазой. В этом случае, в силу теоремы Фурье, произвольная пространственно-временная зависимость может быть получена путем наложения колебаний разных частот.

Наряду с однородным уравнением (1), можно рассматривать также неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho. \quad (5)$$

Функции ρ можно приписать смысл *плотности распределения источников волн*.

Теория уравнения Гельмгольца во многом напоминает теорию уравнений Лапласа и Пуассона. В частности, для уравнения Гельмгольца также характерна постановка граничных задач: Дирихле, Неймана и смешанной. Эти задачи могут быть внешними или внутренними.

Как и при изучении уравнений Лапласа и Пуассона, нас будут интересовать регулярные решения граничных задач. Используя интегральные формулы мы, не делая особых оговорок, будем также предполагать непрерывность первых производных решений в изучаемой области вплоть до ее границы.

Кроме граничных задач, для уравнения Гельмгольца возникает и совершенно новый тип задач на определение *собственных колебаний*.

3. Метод Галеркина

Остановимся подробнее на одном из наиболее часто используемых проекционных численных методов решения краевых задач для уравнения Гельмгольца [1,7].

Для решения задачи

$$\nabla * \left[\frac{1}{p(x,y)} \nabla u \right] + k_0^2 q(x,y) u = 0 \quad (6)$$

рассмотрим соотношение

$$(u, \gamma)_{L_0} + (Ku, \gamma) = (f, \gamma)$$

в следующем виде:

$$(Lu, \gamma) - (f, \gamma) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{1}{p} (\Delta u) \gamma - qk^2 u \gamma \right) = 0 \quad (7)$$

В данном случае $f = 0$. Физически это означает, что в рассматриваемой области отсутствуют источники света. Свет в рассматриваемую область проходит извне. Так как падающее поле $u^{inc}(x, y)$ известно, то уравнение (6) должно быть решено для рассеянного поля u^{sc} . Вместо (7) для суммы рассеянного и падающего полей получим соотношение вида:

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{1}{p} \Delta [u_{\Omega}^{sc} + u_{\Omega}^{inc}] \gamma - qk^2 [u_{\Omega}^{sc} + u_{\Omega}^{inc}] \gamma \right) d\Omega = 0 \quad (8)$$

Применим для приближенного нахождения решения задачи метод конечных элементов Галеркина с подпространствами F_h специального вида. Чтобы построить F_h триангулируем область Q , т.е. покроем ее треугольной сетью Ω_h . После этого в каждом из треугольников построим полином степени n от переменных x и y вида

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j_1+j_2=i} p_{j_1 j_2} x^{j_1} y^{j_2} \quad (9)$$

Рассмотрим описанный способ на примере $n = 1$, т.е. для кусочно-линейной функции:

Непрерывность функции u^h будет следовать из того, что на каждой из сторон любого треугольника эта функция определяется однозначно. Доказано, что если требования к гладкости задачи ограничены принадлежностью решения $\hat{u}$ задачи (6) к классу $C^{(2)}(\Omega)$ то для случая кусочно-линейных приближений (9) имеет место оценка $\|u^h - \hat{u}\| \leq Ch$, где $\tilde{N} > 0$ – некоторая константа.

Для ТЕ поляризации решение $\hat{u}$ задачи (6) принадлежит к классу $C^{(2)}$, следовательно не требуется построения границы Γ по границе раздела сред. Для ТМ-поляризации вследствие разрыва нормальной производной поля на границе раздела сред границу Γ следует строить по границе раздела сред с удовлетворением сшивки граничных условий.

Для однозначного определения функции $g(x, y)$ достаточно задать значения $g(x, y)$ в вершинах треугольников. Если мы пронумеруем все внутренние вершины треугольников: $\{c_k\}_{k=1}^{N_h}$, а через Γ_{hk} обозначим объединение всех треугольников, имеющих точку c_k своей вершиной,

то базисом пространства F_h будет система функций $\{\omega_k(x, y)\}_{k=1}^{N_h}$ определяемая условиями:

1. $\omega_k(c_j) = \delta_{kj}$ где δ_{kj} – символ Кронекера;
2. $\omega_k(x, y)$ на каждом из треугольников является линейно функцией, т.е. представляется выражением (9).

Аналогично подвергается разбиению область Γ на линейные сегменты $\Gamma_h, \Gamma_{h,k}$ – объединение всех линейных сегментов, имеющих точку c_k своей вершиной, где $c_k \in \Gamma$. Конкретизируя дальше рассматриваемый метод, предположим, что $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < S_x, 0 < y < S_y\}$ является прямоугольником, а Γ включает в себя все точки, одна из координат которых равна 0 или S . Покроем Ω обычной равномерное квадратной сеткой с шагом $h_x = \frac{S_x}{N_x - 1}, h_y = \frac{S_y}{N_y - 1}$ (N_y – целое число, $N_y > 2$) и триангулируем Ω . При этом Ω представляется $2(N_x - 1)(N_y - 1)$ треугольными элементами, а Γ $M = 2(N_x + N_y - 2)$ линейными сегментами. Узлы области будем отмечать двумя индексами (k, l) где первый индекс $1 \leq k \leq N_x$ соответствует точкам деления по координате x , а второй индекс $l (1 \leq l \leq N_y)$ по y .

Систему базисных функций для Ω обозначим для этого случая $\{\omega_{k,l}^\Omega(x, y)\}_{k,l=0}^{N_x, N_y}$ и систему базисных функций для Γ $\{\omega_m^\Gamma(x, y)\}_{f(k,l)}^M$ обозначим $f(k, l)$ однозначно сопоставляющая точке x_k, y_l точку на Γ с порядковым номером m , может иметь вид

$$f(k, l) = \begin{cases} l, & k = l = 1 \\ N + k, & l = N \quad k \neq 1 \\ 3n + 2 - l, & k = N \quad l \neq N \\ 4N + 2 - l, & k = N \quad l \neq 1, l \neq N \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом можно записать систему линейных уравнений:

$$Au^{sc} + Bv^{sc} = -(Au^{inc} + Bv^{inc}) \quad (11)$$

где $u = \left(u_1, \dots, u_{(N+1)^2} \right)^T$ – вектор составленный из коэффициентов $\left\{ u_{N_y(k)+l} = u_{k,l} \right\}_{k,l=0}^{N_x, N_y}$ разложения

$$u^h(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N_x, N_y} u_{k,l} \omega_{k,l}^\Omega(x, y) \quad (12)$$

Хотя равенство (12) действительно для всех точек (x, y) в Ω , необходима отдельная обработка величин поля и его частных производных на Γ от значений во внутренней области. Это требует дополнительной вычислительной схемы, которая рассматривает только линейные сегменты на границе.

Элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$a_{N_y(k)+l, N_y(i)+j} = \iint_{\Omega_{k,l}} \frac{1}{p(x, y)} \frac{\partial \omega_{k,l}^\Omega(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \omega_{i,j}^\Omega(x, y)}{\partial x} + \frac{\omega_{k,l}^\Omega(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \omega_{i,j}^\Omega(x, y)}{\partial y} - \\ - k_0^2 q(x, y) \omega_{k,l}^\Omega(x, y) \omega_{i,j}^\Omega(x, y) d\Omega, \quad k, i = 1, \dots, N_x; l, j = 1, \dots, N_y \quad (13)$$

где $\omega_{k,j}$ – треугольная область, включающая узлы сети k и j .

Элементы матрицы B вычисляются по формулам

$$b_{m,p} = - \int_{\Gamma_{m,p}} \omega_m^{\Gamma m,p} \omega_p^{\Gamma m,p} dl, \quad m, p = 1, \dots, M. \quad (14)$$

где $\Gamma_{m,p}$ – линейная область границы Γ , включающая узлы границы m и p .

Введем обозначение $a_{k,l}^{i,j} = a_{N_y(k)+l, N_y(i)+j}$. Учитывая вид функций $\{\omega_{k,l}^\Omega(x, y)\}_{k,l=0}^{N_x, N_y}$, нетрудно показать, что $a_{k,l}^{i,j} = 0$, если выполнено хотя бы одно из двух неравенств:

$$|i - k| > 1, |j - l| > 1, k, i = 1, \dots, N_x; l, j = 1, \dots, N_y.$$

Отсюда сразу следует, что матрица A является блочной трехдиагонального вида.

Можно получить более строгое решение, если связь нормальных производных со значениями поля на границе Γ определяется с использованием метода граничных элементов.

Библиографический список

1. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 2014.
2. Гринченко, В. Т. Волновые задачи для рассеяния звука на упругих оболочках / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк. – Киев : Наукова Думка, 1986.

3. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1976. – 296 с.
4. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 742 с.
6. Князев, С. Ю. Численное решение уравнений Пуассона и Гельмгольца с помощью метода точечных источников / С. Ю. Князев // Известия вузов. Электромеханика. – 2007. – № 2. – С. 77–78.
7. Миранда, К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. – М. : Изд-во иностр. лит., 2007.
8. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Ad. Vol. Comput. Math. – 2008. – Vol. 9. – P. 69–95.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ

К. А. Краснухина, О. В. Захаров^{*}

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

^{*} ПАО «Мобильные ТелеСистемы» (МТС),
г. Пенза, Россия
olegzakharov@rambler.ru

Одна из важных задач 3D-моделирования – это процесс преобразования двух плоских изображений в трехмерную сцену с восстановлением информации о глубине каждой точки плоского изображения (расстоянии от стереокамеры до соответствующей точки реальной сцены).

Зная информацию о глубине (по своей сути – это функция двух переменных) можно генерировать 3D модели ландшафта и других природных объектов для использования в различных приложениях, таких как виртуальная реальность, симуляция полета, робототехника. В частности, знание об удаленности точек изображения от реального прообраза позволяет делать захват опорных точек движущегося объекта для получения трехмерных координат, что важно в индустрии спецэффектов, кино и телевидении. Захват координат опорных точек позволяет строить уникальные бесконтактные человеко-машинные интерфейсы, управление в которых осуществляется движениями пальцев рук или вообще жестов в пространстве на некотором удалении от стереокамеры.

На данный момент известны активные и пассивные методы восстановления информации о глубине реальной сцены. Активные методы

используют ультразвуковые преобразователи или лазерное освещение рабочего пространства, дающие на выходе быструю и точную информацию о глубине [1, 2]. Однако у этих методов есть ограничения по отношению к диапазону измерений и стоимости аппаратных компонентов.

Пассивные методы, основанные на компьютерном зрении, обычно реализуются более простыми и недорогими сенсорами, определяющими расстояние. Такие методы способны генерировать информацию о глубине по полученной паре изображений и параметрам двух камер [1, 3]. Одна из фундаментальных проблем стереозрения заключается в установлении точного соответствия между левым и правым изображением стереопары. Под соответствием понимается расстояние (диспаратитет) между пикселями одного и того же объекта на левом и правом изображении. Существующие локальные методы по вычислению карты диспаратитета основаны на принципе «скользящего окна» [3]. Они характеризуются определенной сбалансированностью скорости-качества, хорошо масштабируются и реализуются на таких параллельных архитектурах, как видеокарты.

Одним из основных понятий при построении трехмерных траекторий являются точки схода.

Точки схода – это точки на изображении, где пересекаются проекции параллельных в пространстве линий. Например, в Google SketchUp пользователь должен задать на фотографии две пары отрезков, определяющих горизонтальные точки схода для перпендикулярных плоскостей. В заданной системе координат можно осуществлять трехмерное моделирование с использованием модели перспективной геометрии.

Каждая отдельная группа параллельных линий имеет свою точку схода. В зависимости от направления линий точки схода располагаются в различных местах изображения. Так же различают недоступную точку схода - точка схода, находящаяся за пределами картины, что не позволяет ей воспользоваться при перспективных построениях. Существуют приемы, которые дают возможность строить перспективы линий, проходящие своим продолжением через эту точку, не пользуясь ею.

Кроме того, отдельными видами перспективы являются:

1. Линейная перспектива – рассматривает правила и способы изображения контуров предметов, а равно границ собственных и падающих теней и построения отражений;

2. Перспектива воздушная - рассматривает видимое зрителем освещение предметов в отношении силы света и теней, цвета и изменчивости окраски в зависимости от расстояния предметов до зрителя, влияния отраженных лучей и прочее;

3. Аналитическая перспектива занимается определением положения точек изображения вычислениями;

4. Геометрическая - определением формы изображения геометрическими построениями.

Перспективные построения являются по существу построениями конических проекций, причем с геометрической точки зрения, ортогональная проекция и линейная проекция одно и то же. Ортогональная проекция есть проекция при условии, что точка зрения удалена в бесконечность. Однако не каждая коническая проекция есть перспектива.

На любом изображении может быть множество точек схода, ими, по сути, может стать каждый пиксель. Наглядно это представлено на рис. 1.

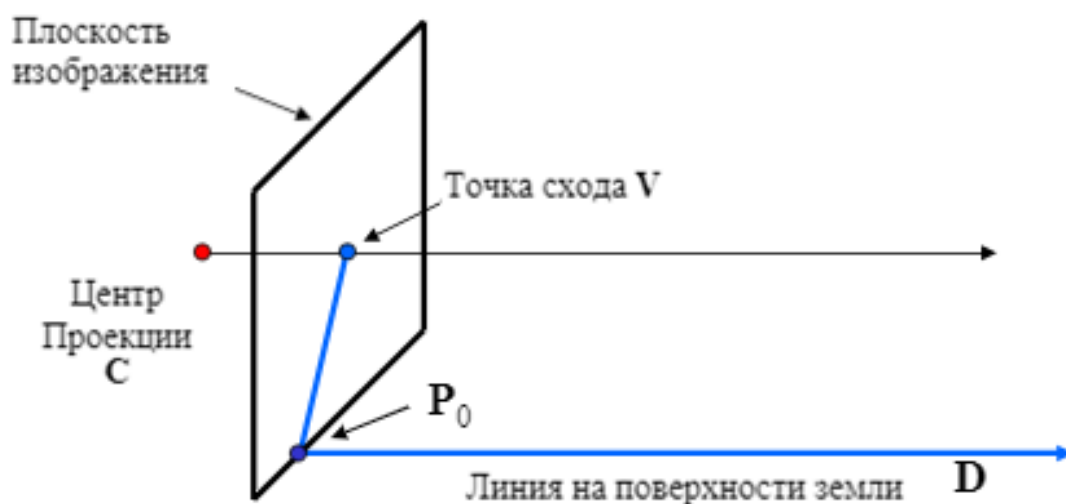


Рис. 1. Построение точки схода

Вычисление таких точек происходит следующим образом:

1. Поиск прямых отрезков/линий на изображении
2. Группировка линий
3. Вычисление точки схода для группы линий

Сами точки могут быть найдены с использованием сферической системы координат:

$$P = P_0 + tD$$

или

$$P_t = \begin{bmatrix} P_X + tD_X \\ P_Y + tD_Y \\ P_Z + tD_Z \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{P_X}{t} + D_X \\ \frac{P_Y}{t} + D_Y \\ \frac{P_Z}{t} + D_Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Если $t \rightarrow \infty$ то получаем

$$P_{\infty} \equiv \begin{bmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Следовательно, чтобы вычислить точку схода необходимо воспользоваться выражением зависимости $V = \pi P_{\infty}$, где P_{∞} – точка в бесконечности, V – ее проекция. Они зависят от направления прямой и при этом все параллельные линии $P_0 + tD$, $P_1 + tD$ пересекаются в P_{∞} .

На основе данных преобразований можно получить ряд дополнительных возможностей при построении 3D-моделей. В частности:

1. Исправление углов наклона и крена камеры. При этом вертикальные в пространстве линии становятся вертикальными на изображении.

2. Определение уровня горизонта и точек схода. Горизонт на фотографиях с исправленным углом наклона камеры является горизонтальной линией.

3. Задание линии контура объекта и его вертикальных границ. По сути, необходимо указать на плоской фотографии проекцию линии сечения объекта какой-либо горизонтальной плоскостью на изображение. При рисовании такой ломаной ее отрезки автоматически привязываются к направлениям на вычисленные точки схода. Точками задаются верхняя и нижняя границы объекта. Такие данные позволяют получить трехмерную модель видимых плоскостей объекта.

Для этого достаточно вычислять виртуальный вид с нулевыми углами наклона и крена, что позволяет упростить дальнейший анализ. Пусть I – исходное изображение, I' – искомый виртуальный вид. Ориентация камеры для изображений I и I' отличается только углами наклона aX и крена aZ . Искомое преобразование изображения I к I' можно описать поворотной гомографией H , которая может быть параметризована этими двумя углами:

$$H = \begin{bmatrix} \cos(aZ) & \sin(aZ) & 0 \\ -\cos(aX) \cdot \sin(aZ) & \cos(aX) \cdot \cos(aZ) & \sin(aX) \\ \sin(aX) \cdot \sin(aZ) & -\sin(aX) \cdot \cos(aZ) & \cos(aX) \end{bmatrix}$$

На изображениях часто присутствуют прямые отрезки. Находятся такие отрезки l_i , $i=1...N$, которые соответствуют вертикальной точке схода. Пусть после применения к отрезкам l_i преобразования H они переходят в отрезки k_i . Составляется целевая функция G отклонения от-

резков k_i от вертикалей. Для этого можно использовать, например, сумму квадратов разницы в X координатах концов k_i^1 и k_i^2 отрезков k_i :

$$G_i = \left(k_i^1 \cdot x - k_i^2 \cdot x \right)^2, \quad G = \sum_{i=1}^N G_i$$

Находятся такие углы наклона aX и крена aZ , что рассчитанное по ним преобразование H дает минимум функции для заданных отрезков

$$k_i = H(l_i) = F(l_i, H) = F(l_i, aX, aZ), \quad G = G(k_i) \\ (aX, aZ) = \arg \min G$$

Минимизация заданной функции осуществляется с помощью алгоритма градиентного спуска. В качестве первого приближения задаются нулевые углы aX и aZ .

Для поиска линий, принадлежащих вертикальной точке схода используется устойчивый алгоритм оценки параметров модели на основе случайных выборок (RANSAC).

Библиографический список

1. Якубенко, А. Восстановление структуры и текстуры фасадов городских зданий / А. Якубенко, В. Кононов, И. Мизин, В. Конушин, А. Конушин // Программирование. – 2011. – № 5. – С. 61–75.
2. Якубенко, А. Построение трехмерных моделей зданий по фотографиям для систем виртуальной реальности / А. Якубенко // Программные системы и инструменты. – 2012.
3. Баринова, О. Быстрый метод семантической сегментации изображений для автоматической трехмерной реконструкции городских сцен по одной фотографии / В. Конушин, А. Якубенко, А. Конушин // Интеллектуализация обработки информации : тр. конф. – 2008. – С. 22–24.

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ РАСПОЗНАВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖЕЙ

С. Ю. Варлашина, Н. В. Наземнова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math@pnzgu.ru

Образное восприятие окружающего мира можно толковать как одно из загадочных свойств человеческого сознания, позволяющее каждому индивиду в меру его способностей разобраться в бесконечном потоке воспринимаемой информации. Если говорить более точно, то образ-это результат отражения предметов и явлений реального мира в сознании человека. Распознавание образа на чувственной ступени осуществляется через ощущения, которые являются результатом воздействия данного объекта на органы чувств через восприятие, как непосредственное, чувственное отражение действительности в сознании, через представление, как воспроизведение в сознании ранее изученного, суждения, как форму мышления, представляющую собой сочетание понятий, из которых одно определяет и раскрывает содержание другого, через умозаключения, как вывод из каких-нибудь суждений. Материальной формой выражения выступают практические действия, язык, различные знаковые модели. По содержанию образ объективен в той мере, в какой он адекватно отражает объект.

Непрерывность и преемственность математического образования, которые имеют черты стабильности в средней школе, претерпевают разрыв при переходе на ступень колледжа. Этот разрыв особенно ощутим после общего базового образования. Осваивая большой объем учебного материала в условиях ограниченных временных рамок, стало традицией, что учащийся проходит учебный путь лишь до умений действовать по образцу, забывая о том, что важным компонентом становления учащегося как личности является формирование у него действия по распознаванию образа в преобразованном виде. Формирование действия по распознаванию образа является одним из важных этапов подготовки учащихся к построению наглядных изображений пространственных фигур.

Учитывая полифункциональный характер образовательной системы профессионального образования, потенциальные различия в буду-

щих образовательных траекториях выпускников, различную степень математической грамотности и различную степень обучаемости, приходим к заключению о необходимости разбиения проблемы распознавания образов студентами на два взаимосвязанных направления: обучения и распознавания. Обучение осуществляется путем показа отдельных геометрических тел с указанием их свойств и принадлежности к тому или другому образу. В результате обучения учащиеся должны приобрести способность реагировать на объекты одного образа.

Процесс обучения распознаванию образа должен завершиться только тогда, когда реакция учащихся на изучение данного образа будет без подсказок. Важно, что в процессе обучения указываются сами геометрические тела, их свойства и их принадлежность образу. За обучением следует процесс распознавания объектов, который характеризуется определенными действиями учащихся.

Объекты одного и того же образа при решении сложных стереометрических задач могут достаточно сильно отличаться друг от друга, и естественно по-разному воздействовать на органы чувств. Каждый раз, когда студенты сталкиваются с незнакомыми задачами, появляется естественное желание представить ее в виде некоторых легко понимаемых задач, которые позволили осмыслить эту задачу с помощью различных определений, теорем, которые легко усваиваются их воображением.

Выделяют четыре этапа формирования действия по распознаванию образа: на первом этапе распознавание осуществляется через ощущения, которые являются результатом воздействия данного объекта на органы чувств. На втором этапе через восприятие в сознании ранее изученного. На третьем этапе через суждения, как форму мышления, представляющую собой сочетание понятий, из которых одно определяет и раскрывает содержание другого. На четвертом—через умозаключение, как вывод из каких-нибудь суждений. Как правило, реализация операций на последних двух этапах по формированию действия распознавания образа у многих студентов колледжей затруднена.

Трудности при решении стереометрических задач испытывают даже хорошо успевающие студенты. Так, при чтении и построении чертежа в трёх проекциях необходимо менять единую зрительную позицию и рассматривать объект с трёх различных точек зрения. Здесь происходит "преобразование" образов сразу и одновременно в трех разных направлениях при переходе: от реального объекта к его условно графическому изображению; от трёхмерных изображений к двумерным; от фиксированной точки отсчёта к другим системам отсчёта. Оперирование графическими изображениями связано со сложной интеллектуальной работой, так как на основе графического изображения требуется не просто создать образ, но и преобразовать его в другой. Образ схемы и образ объекта должны быть согласованы между собой, что требует постоянного перехода от образа статического к образу динамическому.

Анализируя трудности, возникающие у студентов колледжей при формировании необходимых действий, приходим к выводу, что при решении проблемы обучения математическим методам распознавания образов следует опираться на закономерности, определяемые: 1) теорией стимулирующих звеньев, разработанной Л. С. Выготским. Суть теории состоит в следующем. Ассоциация (A_1, A_2) образуется если процессы A_1 и A_2 , протекающие в нашем сознании, возникают по ходу деятельности и повторяются непосредственно друг за другом, или с участием стимулирующего звена B . Если это звено сохраняется, то образуются две ассоциации (A_1, B) и (B, A_2) ;

2) теорией обобщенных ассоциаций П. А. Шеварева, которые образуются путем «правилосообразных» действий учащегося, т.е. когда правило, определения, теоремы выступают в роли стимулирующих звеньев в процессе деятельности. Эти ассоциации образуются у студентов при выполнении упражнений путем активной мыслительной деятельности, что способствует формированию действия по распознаванию образа. Если существенные компоненты двух процессов протекающих в сознании, при их повторении друг за другом варьируются, то может образовываться обобщенная ассоциация; 3) для более эффективного обучения студентов распознаванию геометрических образов требуется тем меньше задач и упражнений, чем более развит и обогащен учащийся знаниями, умениями, навыками относящимися к данной теме; 4) для закрепления и повторения уровня сформированности умений и навыков по распознаванию геометрических образов повторение должно обладать высокой степенью концентрированности; 5) если действие по распознаванию образа учащихся формируются с опорой на изучаемое определение, аксиомы, то достигается глубокое понимание и формируются прочные, устойчивые, умения и навыки.

Нами разработана система задач, формирующая в сознании студентов колледжей систему приемов и методов, способствующих формированию действия по распознаванию образа. Примером могут служить следующие задания.

Упражнение 1. В декартовой системе координат даны точки $A(9,3;5)$, $B(2,1;0,5)$, $C(2,3;2)$, $O(0,0)$. Определите тип многоугольника.

Упражнение 2. Дан куб в декартовой системе координат, расположенный в первой четверти (рис. 1). Координаты его вершин $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$. а) Каждое ребро куба разделено на три равные части, от каждой вершины отрезали пирамиды, длина ребра которой $AA_2=A_2A_3=A_3A_1=1/3*AA_1$. Определите тип данного многогранника. Относится ли он к Платоновым или Архимедовым телам? б) Определите объем полученного тела; в) Впишите правильную восьмиугольную пирамиду и найдите ее объем.

Упражнение 3. Постройте развертку многогранника по координатам его вершин. Определите вид многогранника. Найдите длину каж-

дого ребра. Вычислите его объем, если относительно декартовой системы координат на плоскости его вершины заданы своими координатами: $A(6,5;4,5)$, $B(5,5;3,5)$, $C(3;3,5)$, $D(2;5)$, $E(3;6,5)$, $F(5,5;6,5)$, $Z(7;3,5)$, $A_1(8;4,5)$, $B_1(8,5;3,5)$, $C_1(10,5;3,5)$, $D_1(11,5;4,5)$, $E_1(10,5;6,5)$, $F_1(8,5;6,5)$, $Z_1(12;3,5)$, $A_2(6,5;7,5)$, $B_2(8;7,5)$, $C_2(9;9)$, $D_2(8;10)$, $E_2(6,5;10,5)$, $F_2(5,5;9,5)$, $Z_2(5;7,5)$.

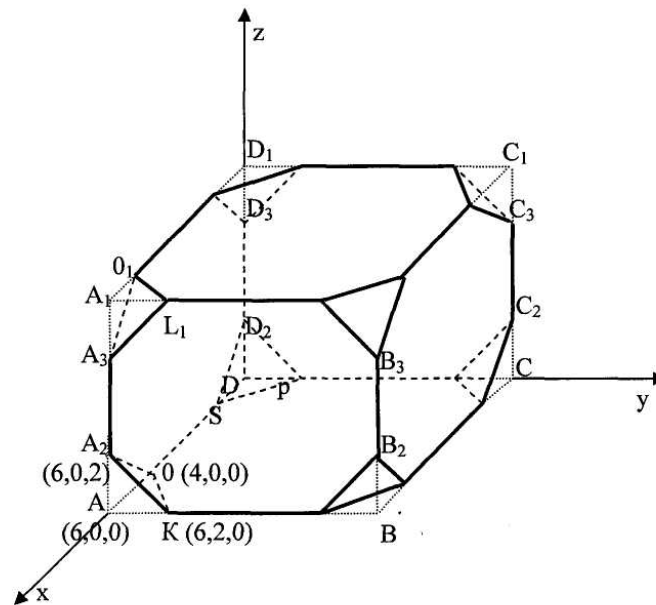


Рис.1

Упражнение 4. Относительно декартовой системы координат задана четырех угольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, задана координатами своих вершин $S(1,2,3)$, $A(1,0,-2)$, $B(0,1,2)$, $C(2,-1,0)$. Найти:

- 1) координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма;
- 2) координаты вершины D ;
- 3) составить уравнение плоскости $ABCD$;
- 4) составить уравнение диагональных плоскостей пирамиды;
- 5) найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины S на основание;
- 6) площадь основания $ABCD$;
- 7) объем пирамиды;
- 8) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 9) площадь полной поверхности пирамиды;

В заключение необходимо отметить, что подобные упражнения способствуют глубокому усвоению студентами координатного метода, способствуют формированию действия по распознаванию геометрических тел, развивают пространственное воображение, логическое мышление. Важно, чтобы студент колледжа владел системой знаний и умений, позволяющих ему из всех данных в условии геометрической задачи

посредством всевозможных цепочек логических выводов и заключений получать как можно более полную и более точную информацию о данном геометрическом образе. Такие задачи целесообразно использовать на занятиях по геометрии в качестве заданий личностно ориентированного типа, для отработки умений и навыков у учащихся по применению математических методов к исследованию объектов реального мира.

Библиографический список

1. Варлашина, С. Ю. Способы активизации учебной деятельности старшеклассников в процессе их обучения математическим методам распознавания геометрических образов / С. Ю. Варлашина, Н. В. Наземнова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 175–181.
2. Дорофеев, С. Н. Решение геометрических задач векторным методом / С. Н. Дорофеев. – М. : МПУ, 2000.
3. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
4. Наземнова, Н. В. Закономерности обучения старшеклассников распознаванию геометрических образов / Н. В. Наземнова. – Орел : ОГУ, 2007.
5. Талызина, Н. Ф. Пути и проблемы управления познавательной деятельностью, человеком / Н. Ф. Талызина. – М., 2005.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА STUDENT[CALCULUS1] ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ю. В. Остудина, И. М. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: yulya.ostudina@yandex.ru, irmojko@yandex.ru

Введение

Сейчас мы живем в 21 веке, который имеет второе название «век информационных технологий». Действительно, на сегодняшний день нас всюду окружают компьютеры, мы окутаны сетью Интернета, и каждый год из рекламных роликов мы узнаем о сотнях новых устройств.

Современные изобретения помогают нам в различных сферах жизни, от повседневного быта до освоения космоса. Новые технологии успешно применяются в медицине, строительстве, промышленности, также в таких популярных направлениях как синтетическая биология и вычислительная социология.

Все это немыслимо без существования компьютеров и, следовательно, математики. Ведь для открытия необходимы математические расчеты, компьютерное моделирование, аналитическое прогнозирование.

Из всего сказанного становится понятно, насколько важно уметь точно и быстро обрабатывать полученную информацию. Наверное, никому не хочется тратить время на то, чтобы вручную считать сложные интегралы, чертить диаграммы и графики, хочется сэкономить свои силы на решение более серьезных проблем.

Для этого на сегодняшний день существуют различные математические системы, такие как Maple, Mathematica, MatLab, MathCad, которые помогают пользователю в решении нужных ему задач.

Система Maple

Maple является продуктом компании Waterloo Maple Inc. (Канада), которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Этот продукт представляет собой один из наиболее мощных математических пакетов. Его возможности охватывают достаточно много разделов математики и могут с пользой применяться на разных уровнях, включая и уровень серьезных научных исследований.

Основу пакета составляет специальное ядро - программа символьных преобразований. Кроме того, имеется несколько тысяч специальных функций, хранящихся в подгружаемых к ядру пакетах и библиотеках.

Например, казалось бы, такое сложное выражение как:

$$\frac{1 - \cos(x)^2 + \sin(x) * \cos(x)}{\sin(x) * \cos(x) + \cos(x)^2}$$

после применения функции *simplify* станет выглядеть так:

simplify(%);

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Maple умеет не только вычислять, но и обладает богатыми возможностями графического представления математических объектов и процессов.

plot($\frac{\cos(x)}{x}$, x = 0..infinity, -0.5..1, color = blue); (рис. 1).

*plot3d(t = $\frac{\pi}{3}$..2 * Pi, p = 0..Pi, coords = spherical);* (рис. 2).

В ядро Maple входит большое количество функций, относящихся к математическому анализу. К ним относятся вычисление пределов, дифференцирование, интегрирование, суммирование числовых рядов, разложение функций в степенные ряды и решение дифференциальных уравнений.

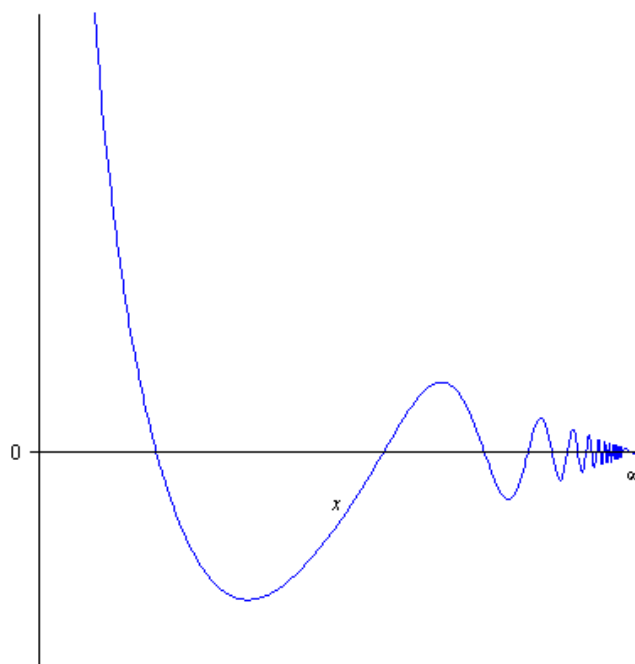


Рис. 1

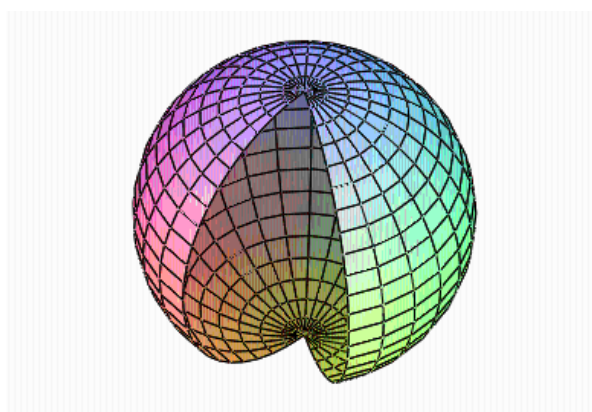


Рис. 2

Пакет StudentCalculus1

Система Maple сама по себе является довольно эффективной для вычислений. Но далеко не все функции содержатся в ядре этой системы, многие из них находятся в специальных пакетах, которые необходимо подключить перед началом работы. В них содержатся группы дополнительных возможностей, которые необходимы в разных сферах.

Пакет Student[Calculus1] разработан специально для учебных целей. С помощью этого пакета преподавателям легче демонстрировать, а студентам - понимать основы математического анализа функций от одной переменной. Основные составляющие пакета – визуализация и пошаговое вычисление. Команды визуализации выводят на экран графики Maple и одно или несколько символьных представлений изучаемой величины. Введя `with(Student[Calculus1])` можно посмотреть, какие именно функции содержит в себе данный пакет:

[*AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePoints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, MeanValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSolution, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TangentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem*]

Рассмотрим некоторые из возможностей пакета Student[Calculus1]. Пусть, например, нужно продифференцировать функцию:

Diff(sqrt(x^3 - 2), x);

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2})$$

Запрашиваем подсказку:

Hint(%);

[chain]

Подсказка означает, что нужно применить правило последовательного (цепного) дифференцирования сложной функции. Применяем подсказку

Rule[%](%%);

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2}) = \left(\frac{d}{d_X} (\sqrt{_X}) \Big|_{_X = x^3 - 2} \right) \left(\frac{d}{dx} (x^3 - 2) \right)$$

Применяем правило дифференцирования степенной функции

Rule[^](%);

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2}) = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx} (x^3 - 2)}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

Применяем правило дифференцирования суммы функций

Rule[+](%);

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2}) = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx} (x^3) + \frac{d}{dx} (-2)}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

Еще раз применяем правило дифференцирования степенной функции

`Rule["^"](%);`

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2}) = \frac{1}{2} \frac{3x^2 + \frac{d}{dx}(-2)}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

Применяем правило дифференцирования константы

`Rule[constant](%);`

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 - 2}) = \frac{3}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

Итак, в процессе получения этого результат обучающийся может понять каждый шаг при применении правил дифференцирования функции.

Пакет StudentCalculus1 также может быть полезен в изучении правил вычисления интегралов. Пусть нужно найти неопределенный интеграл:

$$\int x * \ln(x) dx$$

Так же, как и в прошлом примере, запросим подсказку

`Hint(%);`

$$\left[parts, \ln(x), \frac{1}{2} x^2 \right]$$

Maple предлагает нам вычислить интеграл путем интегрирования по частям. Применим этот способ к интегралу:

`Rule[%](%%);`

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} \ln(x) x^2 - \left(\int \frac{1}{2} x dx \right)$$

Продолжаем до получения конечного ответа

`Hint(%);`

$$[constantmultiple]$$

`Rule[%](%%);`

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} \ln(x) x^2 - \frac{1}{2} \int x dx$$

`Hint(%);`

$$[power]$$

`Rule[%](%%);`

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} \ln(x) x^2 - \frac{1}{4} x^2$$

`simplify(%);`

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln(x) - 1)$$

Таким образом, с помощью пакета Maple мы быстро получили пошаговое вычисление неопределенного интеграла.

Однако в StudentCalculus1 интегралы удобнее считать с помощью команды IntTutor(). После ее вызова на экран выводится интерактивное окно Calculus 1 – Integration Methods (рис. 3), в котором и производятся все вычисления. В верхней строчке вводится функция, которую нужно проинтегрировать, переменная, по которой будет производиться интегрирование и необходимые пределы (эти окна можно оставить пустыми, если требуется найти неопределенный интеграл). После нажатия на кнопку Start в левом окне появится наш интеграл. В правом же окне мы можем получать подсказки для вычисления конкретного интеграла, а также можем увидеть, какие ошибки возникают при решении задачи. Ниже находятся кнопки, нажимая на которые мы можем применить различные правила интегрирования к нашей функции.

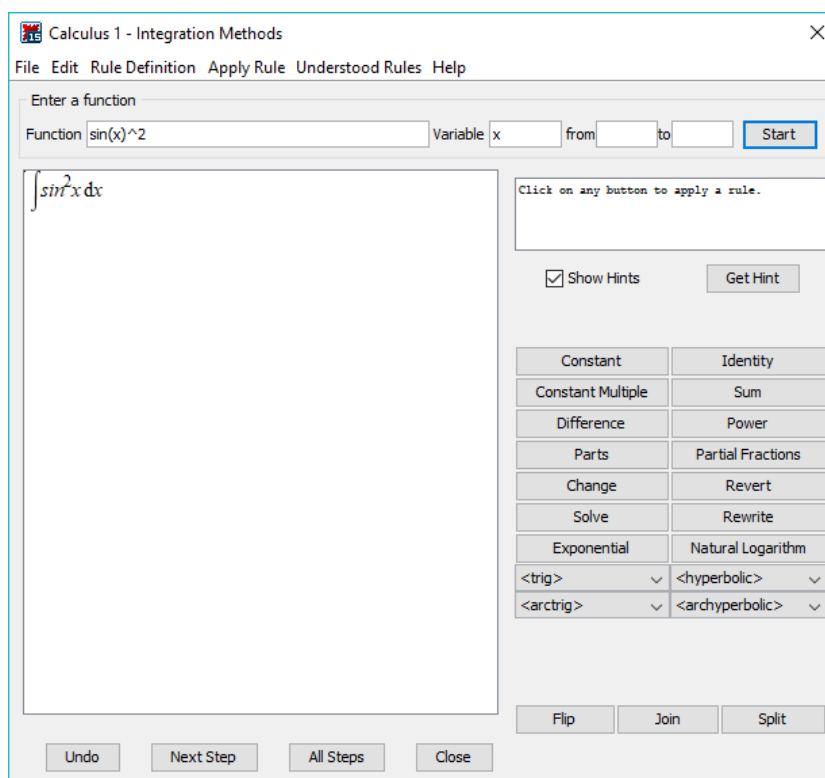


Рис. 3

Попробуем вычислить интеграл, используя интерактивное окно Calculus 1 – Integration Methods. Пусть нам необходимо найти определенный интеграл:

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3*x}} dx$$

Вводим функцию, переменную x и пределы в верхнюю строку, нажимаем Start и видим наш интеграл в левом окне. Далее с помощью

подсказок мы можем получить пошаговое вычисление определенного интеграла, представленное на рис. 4.

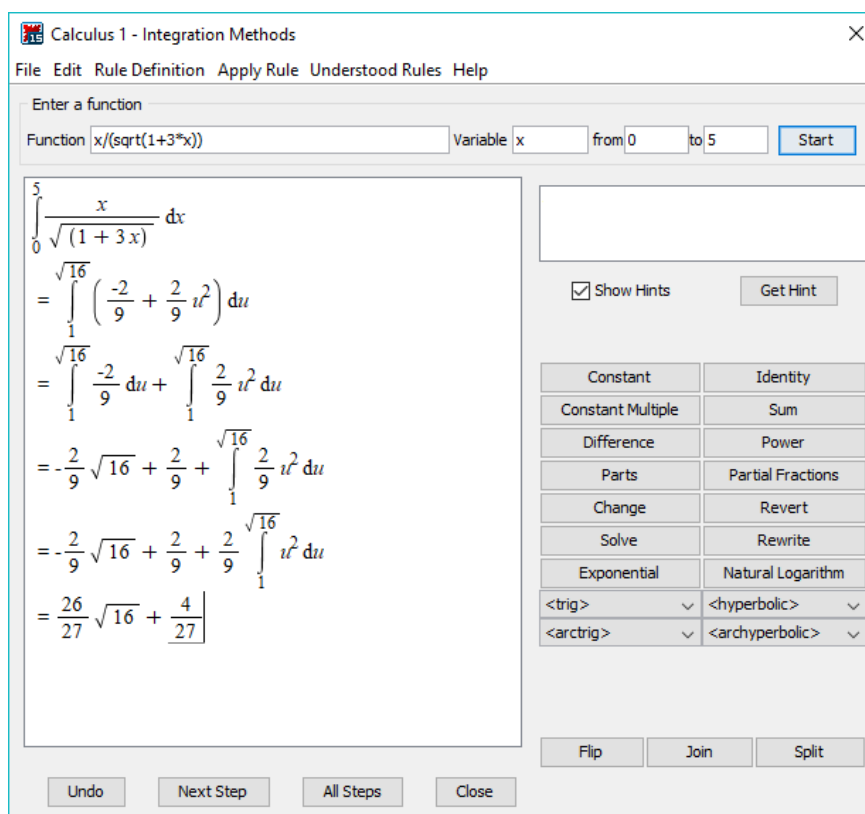


Рис. 4

Ответ, который мы получили, будет также находиться и в самой программе, а не только в окне Calculus 1 – Integration Methods. Мы его можем упростить:

`simplify(%);`

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = 4$$

В итоге мы быстро получили ответ, при этом нам не нужно было каждый раз вручную прописывать команды, что очень удобно.

Пакет StudentCalculus1 также применяется для визуализации процесса решения нелинейных уравнений. Пусть надо вычислить корень уравнения:

$$0.1 * x^3 - 100 = 0$$

После введения команды

`NewtonsMethodTutor(x^3 - 100, x = 0.2);`

выражение появится в интерактивном окне Calculus 1 – Newton's Method (Рисунок 5). Уравнение можно скорректировать. Кроме того, можно задать пределы изменения x , a и b , начальное значение $x=x_0$ и число итераций. В левой части окна представлен график функции и точки, соот-

ветствующие значениям выражения в каждой итерации (они даны ниже). Точки соединены отрезками прямых, что дает наглядное представление о ходе итераций. Также его можно проследить с помощью анимации.

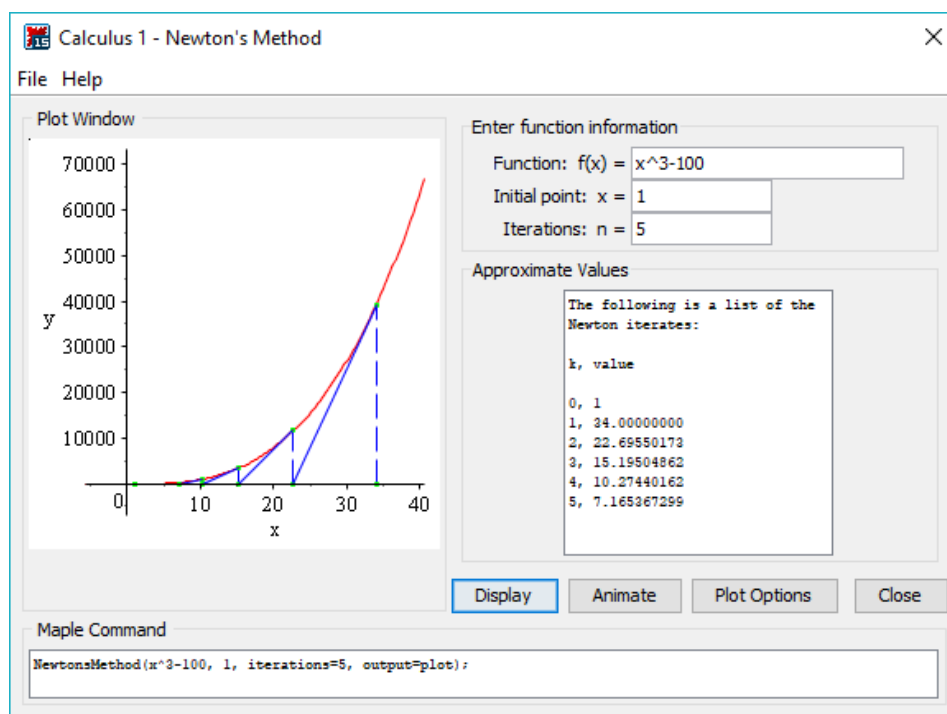


Рис. 5

Таким образом, доверив решение некоторых математических задач компьютеру, можно сэкономить немало времени и сил. Конечно, рассмотренные выше примеры не отображают все возможности пакета StudentCalculus1. Он действительно может помочь студентам освоить элементы математического анализа, а преподавателям – повысить эффективность обучения. И самое главное, с помощью StudentCalculus1 можно понять пошаговый ход процесса, что является огромным преимуществом этого пакета.

Библиографический список

1. Exponenta.ru образовательный математический сайт. – URL: <http://old.exponenta.ru> (дата обращения: 27.04.2018).
2. Maple краткое пособие для первоначального знакомства. – URL: <http://mif.vspu.ru> (дата обращения: 24.04.2018).
3. Tinlib.ru онлайн-библиотека. – URL: <http://www.tinlib.ru> (дата обращения: 05.05.2018).
4. Система компьютерной алгебры Maple. – URL: <http://bourabai.kz> (дата обращения: 24.04.2018).
5. Электронный курс по MAPLE V. – URL: <http://detc.ls.urfu.ru> (дата обращения: 24.04.2018).

МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗНАНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИНЕРГЕТИКИ

Н. Ф. Добрынина

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: math@pnzgu.ru

В последние десятилетия в связи с большими изменениями в системе высшего образования возник интерес к моделированию системы образования с привлечением основных положений синергетики.

В сфере деятельности, связанной с математическими моделями, все более важную роль играют построение и анализ математических моделей нелинейных явлений. Наряду с созданием модели возникла новая технология научных исследований – вычислительный эксперимент. Он включает в себя построение и исследование математических моделей и серии расчетов на ЭВМ. Основоположниками исследований в России были С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий [1]. В Пензенском государственном университете эта проблема была поставлена И.В. Бойковым, начало исследований было положено И.В. Бойковым и И.А. Суздалевой в статье [2]. Позднее по этой проблеме было издано ряд работ Н.Ф. Добрыниной. В данной статье построены и исследованы математические модели распространения знаний, изучены вопросы управления процессом обучения с учетом уровня квалификации преподавателей. Построенные модели можно анализировать и получать качественные результаты. Одной из сфер анализа является изучения устойчивости решений системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение математических знаний в студенческой среде.

1. Аттракторы уравнения образования

В статье [2] была построена следующая математическая модель образования. Множество студентов (поток) был разделен на три группы по успеваемости (сильные, средние и слабые). Это распределение условное, оно не отражает степени одаренности, начальной подготовки, трудолюбие, мотивировку. Однако исследование даже такой простой модели позволяет получить интересные качественные результаты.

В первой модели будем считать, что знания равномерно распределены в каждой из групп.

Обозначим через $N_i(t)$, $i=1,2,3$ уровень знаний в студенческой среде в i -й группе, $U_i(t)$ – управляющее воздействие на i -ю группу. Управляющее воздействие может быть непрерывным, дискретным (контрольные мероприятия), или смешанного типа. Введем коэффициенты:

α_i – коэффициент усвоения знаний в i -й группе, β_i – коэффициент забывания учебного материала, δ_i – коэффициент управляемости i -й группой, ε_i – коэффициент управляемости i -й группой в зависимости от уровня квалификации преподавателя, γ_{ij} – коэффициент влияния i -й группы на j -ю. В результате получаем простейшую модель:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = (\alpha_i - \beta_i)N_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}N_j + (\delta_i + \varepsilon_i)U_i(t), \quad i=1,2,3. \quad (1)$$

В качестве начальных условий берется начальная подготовка группы. $\sum$ означает суммирование по $i \neq j$.

Введем уточнения в модель (1). Будем считать, что коэффициенты $\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_{ij}(t)$ зависят от времени. Будем учитывать эффект насыщения, согласно которому объем знаний каждой группы не может превосходить некоторого предельного значения N_i^* , каждого для своей группы. Наконец, для каждой группы есть предел управляющего воздействия, который обозначим U_i^* . С учетом этих замечаний, модель принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = & \left((\alpha_i(t) - \beta_i(t))N_i(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(t)N_j(t) + (\delta_i(t) + \varepsilon_i) \times \right. \\ & \left. \times U_i(t) \left(1 - \frac{U_i(t)}{U_i^*} \right) \right) \left(1 - \frac{N_i(t)}{N_i^*} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия такие же, как в модели (1).

В моделях (1) и (2) предполагалось, что знания распределены внутри группы равномерно. Откажемся от этого предположения, полагая, что распространение знаний происходит по параметру r . Для самого сильного студента $r = 0$. Тогда модель выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = & \left((\alpha_i(t) - \beta_i(t))N_i(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(t)N_j(t) + (\delta_i(t) + \varepsilon_i) \times \right. \\ & \left. \times U_i(t) \left(1 - \frac{U_i(t)}{U_i^*} \right) \right) \left(1 - \frac{N_i(t)}{N_i^*} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_i(r, t) \frac{\partial N_i}{\partial r} \right), \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\eta_i(r, t)$ – коэффициент передачи знаний в i -й группе. В качестве начальных значений в модели (3) берется уровень начальной подготовки.

Уравнение (1) является замечательным объектом потому, что для него удастся провести детальное качественное исследование – определить все аттракторы; доказать, что именно к ним сходятся траектории при $t \rightarrow \infty$ и указать, при каких начальных данных на какой аттрактор происходит выход. Прежде чем заняться изучением этих вопросов, напомним основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Дифференциальные уравнения как математические модели.

Математическая модель данного объекта должна обладать следующими свойствами:

1. Объект может быть однозначно охарактеризован конечным набором чисел N_1, N_2, N_3 . Эти числа называют фазовыми переменными. Пространство, которому оно принадлежит, называют фазовым пространством. Величину $i = 1, 2, 3$ называют числом степеней свободы.

2. Состояние объекта может меняться со временем t , то есть все числа N_1, N_2, N_3 зависят только от одной независимой переменной. Поведение объекта является детерминированным: состояние изучаемой системы зависит только от ее предыстории, т.е. от значений N_1, N_2, N_3 в предыдущие моменты времени.

3. Все зависимости $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ являются гладкими функциями независимой переменной t .

4. Фазовая скорость изучаемого объекта $\dot{N}_1(t), \dot{N}_2(t), \dot{N}_3(t)$ может зависеть только от фазовых переменных $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ и времени.

Числа N_1, N_2, N_3 можно интерпретировать как координаты точки, движущейся в фазовом пространстве. Величину dN_i / dt называют фазовой скоростью. Рассматриваемые модели были построены с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений считаются известными векторы скорости в точках фазового пространства. Множество таких векторов называется векторным полем. Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы по векторному полю $\vec{N}$ и начальному положению $\vec{N}(0)$ найти траекторию точки в фазовом пространстве $\vec{N}(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1) и начальному условию $\vec{N}(0) = \vec{N}_0$.

3. Динамика образовательного процесса.

Рассмотрим динамику образовательных процессов, полученных при численной реализации моделей (1)-(3).

В простейшей модели (1) $N_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) показывает уровень знаний студентов i -й группы в момент времени t . Если обозначить коэффициенты $\alpha_i - \beta_i = k_i$, то модель примет вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = k_i N_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} N_j.$$

Эту систему можно записать так

$$\frac{\partial N}{\partial t} = AN,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \beta_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial t} \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы следует искать в виде

$$N_1(t) = p_1 e^{\lambda_1 t}, \quad N_2(t) = p_2 e^{\lambda_2 t}, \quad N_3(t) = p_3 e^{\lambda_3 t},$$

где λ_i – характеристические числа матрицы A , p_{ij} – координаты собственных векторов. Фундаментальная система решений имеет вид:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= C_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + C_3 p_{13} e^{\lambda_3 t}, \\ N_2(t) &= C_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 p_{23} e^{\lambda_3 t}, \\ N_3(t) &= C_1 p_{31} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{32} e^{\lambda_2 t} + C_3 p_{33} e^{\lambda_3 t}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 находятся из условия $N_i(0) = N_{i0}$ – исходный объем знаний в начале обучения. Меняя коэффициент управляющего воздействия δ_i , получим различные картины поведения системы.

Качественное исследование уравнения (1) показало, что решения этого уравнения монотонно стремятся к постоянному значению $\vec{N}(t) \rightarrow N^*$ при $t \rightarrow \infty$. N_i^* – предельное значение объема знаний в i -ой подгруппе.

4. Методы синергетики – теоремы сравнения.

Традиционные подходы классической математики, связанные с получением решений в квадратурах, с асимптотическими разложениями, с введением специальных функций, в конце 19 века начали встречаться с нарастающими трудностями. Это потребовало новых идей. Один из методов анализа – теоремы сравнения. Зная график увеличения объема знаний в каждой подгруппе, можно установить какая группа студентов

получит наивысшее качество знаний. Это удастся сделать, не решая уравнений, воспользовавшись теоремой сравнения. Сформулируем теорему применительно к исследуемому случаю.

Теорема 1. Пусть даны решения двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = V_1(t), \frac{dN_2(t)}{dt} = V_2(t), \frac{dN_3}{dt} = V_3(t)$$

с одинаковыми начальными данными $N_1(t_0) = N_2(t_0) = N_3(t_0)$. Пусть $V_1(t_0) > V_2(t_0) > V_3(t_0)$. Тогда $N_1(t) \geq N_2(t) \geq N_3(t)$.

Смысл теоремы прост: если в каждый момент времени усваивать учебный материал быстрее соперников, то к концу семестра придешь первым по успеваемости. Доказательство очевидно. Вычитаем второе уравнение из первого, интегрируем. В результате получается положительная величина. То же самое делаем с другой парой уравнений – вычтем третье уравнение из второго, получаем интеграл, дающий положительную величину. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть заданы решения трех автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с одинаковыми начальными данными

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = V_1(x_1), \frac{dN_2(t)}{dt} = V_2(x_2), \frac{dN_3}{dt} = V_3(x_3),$$

$N_1(0) = N_2(0) = N_3(0)$. Пусть $V_1(x) > V_2(x) > V_3(x)$ для всех значений x . Тогда $N_1(t) \geq N_2(t) \geq N_3(t)$.

Эта теорема рассматривает углы наклона к кривым $\dot{N}_1(t), \dot{N}_2(t), \dot{N}_3(t)$ при одном значении координаты x^* . Доказательство проводится с помощью теоремы Лагранжа.

Теоремы сравнения являются очень эффективным инструментом анализа математических моделей. Допустим, что нас интересует поведение некоторого процесса, который описывается динамической системой

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{N}(t), \quad t(0) = t_0.$$

Пусть у нас есть два уравнения, решения которых известны $\frac{dN_1}{dt} = N_1(t), \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)$ с начальными условиями $N_1(0) = N_2(0)$. Кроме того, $N_1(t) > N > N_2(t)$. В этом случае мы можем «зажать» решение в коридор между функциями и получить информацию о поведении системы.

Такой способ можно предложить, если рассматривать процесс с учетом коэффициента насыщения δ_i .

Рассмотрим динамику процесса образования с учетом насыщения. Об этом явлении написано в работе [1]. Введем еще одно обозначение:

$$\delta_i(t)U_i(t)\left(1 - \frac{U_i(t)}{U_i^*}\right) = Z_i.$$

Модель (2) примет вид

$$\frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = \left(k_i(t)N_i(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(t)N_j(t) + Z_i(t) \right) \left(1 - \frac{N_i(t)}{N_i^*} \right).$$

В общем виде система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = f_i(t, N_1, N_2, N_3) \quad (i=1, 2, 3).$$

Решение ищем в виде :

$$N_1 = N_1(t), N_2 = N_2(t), N_3 = N_3(t),$$

где t – независимая переменная (время).

Данную систему дифференциальных уравнений целесообразно решать методом повышенной точности – методом Рунге-Кутты. Решение показывает, что все три группы студентов достигают определенного предела уровня знаний и происходит процесс насыщения.

Сравнивая результаты реализации моделей (1) и (2), можно заметить, что в первом случае объем знаний неограниченно растет, а во второй модели происходит процесс насыщения и объем знаний не превосходит определенного предела. Такая картина более реальная и поэтому целесообразно использовать модель (2).

Исследование устойчивости решений разобранных моделей сводится к исследованию системы нелинейных дифференциальных уравнений [3]. Анализ устойчивости решений нелинейных задач часто сводится к исследованию линейных уравнений.

Пусть нас интересует устойчивость стационарного решения $\vec{N}(t)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений вида (1). Вектор $\vec{N}^*(t)$ называют точкой равновесия, или особой точкой, если не учитывать влияние преподавателей на процесс обучения. Система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = (\alpha_i - \beta_i)N_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}N_j, \quad i=1, 2, 3. \quad (4)$$

Рассмотрим малое отклонение от особой точки:

$$\vec{N}(t) = \vec{N}^*(t) + \Delta \vec{N}(t).$$

Разложив эту функцию в ряд Тейлора, получим

$$N_i^*(t) + \Delta N_i(t) = (\alpha_i - \beta_i) N_i^* + \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} N_j + A \Delta N_i(t) + G_i(\Delta N_i).$$

Матрица А-якобиан, функцию G образуют нелинейные по ΔN члены разложения. Используем первый метод исследования устойчивости по Ляпунову. Матрица А не имеет собственных значений с нулевыми действительными частями и кратных собственных значений, поэтому при исследовании устойчивости решения $\overline{N}^*$ остаток ряда $\overline{G}(\Delta N)$ можно отбросить. Сделав переход к новому базису, приходим к линейной системе дифференциальных уравнений. Собственные значения λ_k оказываются меньше нуля и состояние равновесия будет устойчивым.

Библиографический список

1. Капица, С. П. Синергетика и прогнозы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. – Изд-во Едиториал УРСС, 2003. – 288 с.
2. Бойков, И. В. Об одной модели образования / И. В. Бойков, И. А. Суздалева // Известия Вузов. Поволжский регион. Естественные науки. Математика. – 2006. – № 5. – С. 229–234.
3. Малинецкий, Г. Г. Математические основы синергетики / Г. Г. Малинецкий. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 312 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ MAPLET В ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

А. А. Исаева, И. М. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: ms.nastya.esaeva@mail.ru, irmojko@yandex.ru

Введение

Начиная с середины XX века, математика охватывает все сферы общественной жизни. Накопленный столетиями огромный поток информации становится сложно обрабатывать вручную. Именно тогда и появляется необходимость в разработке и реализации алгоритмов на ЭВМ, которые бы облегчили работу ученых-математиков.

С этой целью в апреле 1988 года Кейтом Геддесом и Гастоном Гоннетом была создана компания под названием Waterloo Maple Software (в настоящее время Waterloo Maple Inc.). Данная организация вплотную занялась вопросом о создании программного пакета, в кото-

ром пользователь мог бы заниматься анализом, исследованием, визуализацией и непосредственно решением математических задач. Написание данной программы делалось с расчетом на то, что любой пользователь, будь то инженер или простой студент, мог ориентироваться в ней без каких либо затруднений.

И вот компания выпускает свой первый продукт, которым является система компьютерной математики – Maple. Данная программа объединила в себе все то, что требовалось для решения поставленных задач, от простейших уравнений до математического моделирования. Maple активно используется во многих учебных заведениях, исследовательских лабораториях и различных компаниях.

1. Программирование в системе Maple

Система Maple обладает собственным языком программирования. Рассмотрим организацию основных алгоритмических структур: ветвлений и циклов. Для подготовки разветвляющихся программ в Maple-язык программирования включен оператор `if`. Этот оператор работает следующим образом: если истинно булево выражение после ключевого слова `if`, то выполняется последовательность операторов после ключевого слова `then` до первого встретившегося `elif`, `else` или `end if`; если значение булева выражения равно `false` или `FAIL`, то проверяется на истинность выражение после ключевого слова `elif`, если оно задано, и в случае истинности выполняются операторы после второго ключевого слова `then`. Если ни одно из булевых значений не истинно, то выполняются операторы блока `else`, опять таки в случае его задания. Блоков `elif` может быть сколько угодно, тогда как блок `else` всегда только один.

Для организации повторяющихся вычислений в Maple предусмотрены две формы оператора цикла: `for-from` и `for-in`. Первый оператор цикла является универсальным и включает в себя как циклы, повторяющиеся заданное число раз, так и циклы, выполняющиеся, пока некоторое булево выражение является истинным. Вторая форма цикла `for` реализует цикл по элементам списка или множества, и в других языках программирования он известен как цикл `for-each`. Так же может быть использован классический цикл `while` с предусловием: сначала проверяется истинность булева выражения условия, а затем, в зависимости от результатов проверки, либо выполняются операторы тела цикла (условие истинно), либо цикл завершает свою работу (условие ложно).

Ознакомившись с основами программирования в среде Maple, пользователь может создавать различные приложения. Так, одним из модулей для создания приложений, является `Maplet`.

2. Создание Maplet-приложений

Создание данного приложения начинается так же, как и создание любого другого документа в Maple. В строке меню выбираем

File>New>Worksheet Mode. После специального приглашения «>» вводим команду restart, которая открывает новую сессию. Затем подключаем необходимую библиотеку (пакет), в котором содержаться все нужные нам команды. В нашем случае это пакет Maplets[Elements].

Любое приложение Maplet основано на концепции вложенных списков (в Maple список представляет собой упорядоченную последовательность выражений, заключенную в квадратные скобки). Тело программы состоит из основного списка, который включает в себя списки текстовых строк, пользовательских приглашений и других элементов.

Рассмотрим основные функции Maplet на примере создания приложения, которое приводит уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду. Для начала выясним, что же представляет собой результат работы данного приложения. Допустим, нам нужно вывести на экран фразу

«Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида: $A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \cdot B \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + E \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + F \cdot U$ ».

Для этого, после подключения библиотеки, запишем:

```
maplet := Maplet(["Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида"]); Maplets[Display](maplet);
```

В результате на экране появляется окно, внутри которого расположен введенный нами текст. В правом верхнем углу находится кнопка управления, позволяющая закрыть данное окно. При нажатии на эту кнопку приложение Maplet закрывается, и управление возвращается в сеанс Maple.

Чтобы указать параметры, отличные от значений по умолчанию, необходимо включить элемент Window. Так, например, чтобы указать заголовок для окна, в теле Maplet нужно написать:

```
maplet := Maplet(Window('title' = "Приведение уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду", ["Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида"]));
```

Теперь нам необходимо выяснить, как добавляются окна ввода/вывода и кнопки, при нажатии которых выполняются определенные вычисления.

Окно ввода необходимо для получения информации от пользователя. В нашем примере оно служит для введения коэффициентов уравнения. Для его создания нужно вставить элемент TextField в приложение. Поле ввода требует ссылки, которая нужна для возвращения его значения. Ссылка помещается в индекс элемента, например TextField [TF1] (). В круглых скобках указывается размер окна ввода.

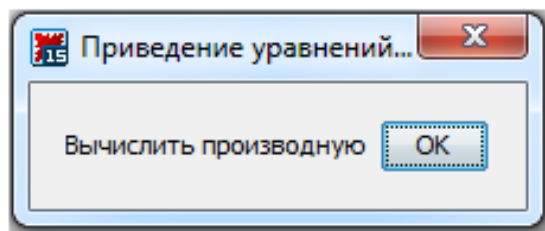
```
maplet := Maplet(Window('title' = "Приведение уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду", ["Линейное одно-
```

родное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида: $A*U_{xx}+2*B*U_{xy}+C*U_{yy}+D*U_x+E*U_y+F*U=0.$ ", "Введите значения коэффициентов:", ["A =", TextField['TF1'](5), "B =", TextField['TF12'](5), "C =", TextField['TF3'](5), "D =", TextField['TF4'](5), "E =", TextField['TF5'](5), "F =", TextField['TF6'](5))]]):

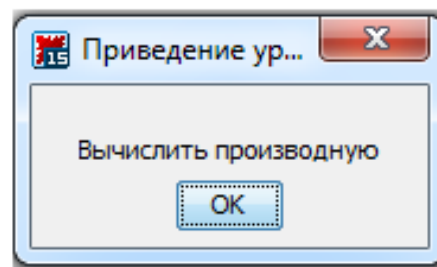
Далее нам нужно добавить кнопки. Кнопка определяется с помощью элемента Button. Он содержит две части информации: текст, который появляется на кнопке; действие, которое происходит при нажатии кнопки. Приложение Maplet обращается к элементу действия Shutdown при нажатии кнопки. Чтобы добавить кнопку, нужно вставить элемент Button во вложенный список (в этом случае текст отображается рядом с кнопкой). Чтобы указать, что кнопка расположена под текстом (то есть во второй строке), поместите текст и кнопку в отдельные списки во вложенном списке.

a) `maplet := Maplet(Window('title' = "Приведение уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду", [{"Вычислить производную", Button("OK", Shutdown())}]))):`

b) `maplet := Maplet(Window('title' = "Приведение уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду", [{"Вычислить производную", Button("OK", Shutdown())}]))):`



a)



б)

Рис. 1. Результаты работы для двух вариантов

Для вывода результата вставим в программу окно вывода, используя элемент TextBox. В индекс элемента в одинарных кавычках помещается ссылка на данные, которые необходимо вывести на экран. В круглых скобках, которые ставятся после индекса, указывается возможность редактирования вывода и размер окна.

`maplet := Maplet(Window('title' = "Приведение уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду", [{"Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида: $A*U_{xx}+2*B*U_{xy}+C*U_{yy}+D*U_x+E*U_y+F*U=0.$ ", "Введите значения коэффициентов:", ["A =", TextField['TF1'](5), "B =", TextField['TF12'](5), "C =", TextField['TF3'](5), "D =", TextField['TF4'](5), "E =", TextField['TF5'](5), "F =", TextField['TF6'](5)], [{"Button("Составить ха-`

рактическое уравнение ", Evaluate('TB2' = 'TF1*dy^2-2*TF12*dx*dy+TF3*dx^2'))], TextBox['TB2']('editable' = 'false', 2 .. 10))]]):

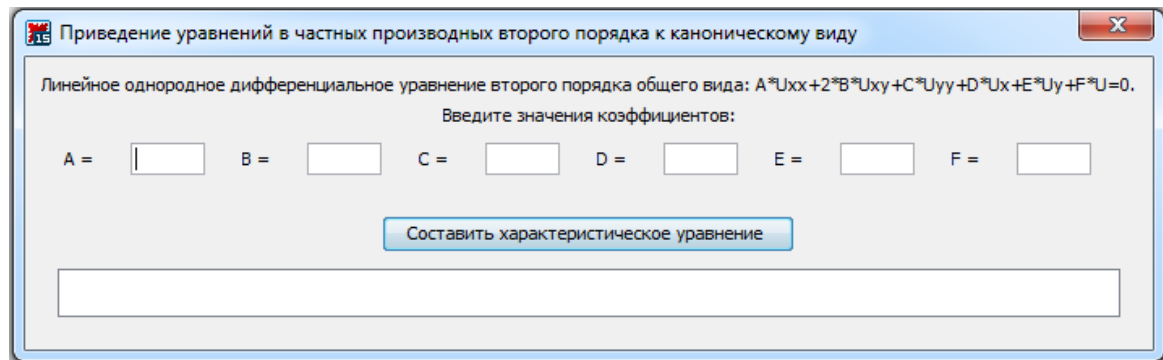


Рис. 2

В приложении предусмотрены очень полезные функции – обработка ошибок и добавление окна справки. Обработку ошибок выполняет процедура Get, расположенная в пакете Maplets [Tools]. В окно можно вставить строку меню и панель инструментов. Меню может содержать любое количество пунктов, каждый из которых состоит из подпунктов.

Есть еще множество элементов, содержащихся в пакете Maplets. К элементам тела окна относятся:

1. CheckBox, RadioButton, Toggle Button – принимает истинное или ложное значение.

2. ComboBox, DropDownBox – представляет собой выпадающий список строк, из которых пользователь может выбрать. Значение по умолчанию выбирается с помощью опции 'value' = "string", иначе – это первая строка в списке.

3. ListBox – список, позволяющий пользователю выбирать ноль или более записей из списка. Чтобы сделать несколько выборов, пользователь должен удерживать клавишу [Ctrl], одновременно нажимая на элементы в списке. Результат из списка – это список, разделенный запятыми, который можно разделить с помощью процедуры Maplets [Tools] [ListBoxSplit].

4. Label – может содержать изображение или текст, который на может изменять пользователь.

5. Plotter – отображает либо двумерную, либо трехмерную диаграмму.

6. Slider – шкала, которая принимает целочисленные выражения.

7. Table – используется для отображения текстовой информации в организованном формате.

Элементы диалога подразделяются на

1. Оповещение
2. Диалоговое окно «Цвет»
3. Окно подтверждения

4. Окно вопроса

А среди элементов команд выделяют:

1. Close Window – закрыть окно
2. Evaluate – оценить выражение
3. RunDialog – отобразить элемент диалога
4. RunWindow – отобразить элемент окна
5. SetOption – задание параметров приложения
6. Shutdown - закрытие приложения Maplet с возможностью вернуть значение параметров в приложение Maplet.

Остановимся на рассмотрении примера приложения, которое приводит уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду, и рассмотрим его создание более детально. Допустим, требуется привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 4 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Входными данными в нашем примере являются коэффициенты уравнения. После того как пользователь ввел необходимые данные, мы можем найти значение определителя по формуле $\Delta = AC - B^2$. В дальнейшем оно понадобится для определения типа уравнения и перехода к новым переменным. Составляем характеристическое уравнение вида:

$$A \cdot dy^2 - 2 \cdot B \cdot dydx + C \cdot dx^2 = 0$$

и решаем его. Для этого нужно:

а) разрешить характеристическое уравнение как квадратное относительно dy ;

б) найти общие интегралы полученного уравнения:

- в случае гиперболического типа: $\begin{cases} \phi(x, y) = C_1 \\ \psi(x, y) = C_2 \end{cases}$;
- в случае параболического типа: $\phi(x, y) = C$;
- в случае эллиптического типа: $\phi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$.

Делаем замену переменных: $\begin{cases} \xi = \phi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$. Для параболического

типа в качестве η выбирается любая линейно независимая от ϕ функция ($\eta = x$ или $\eta = y$). В результате произведенной замены уравнение примет канонический вид.

Таким образом, мы выяснили, что Maplet выступает в качестве интерфейса между пользователем и Maple. Создав графический интерфейс под свои конкретные нужды, пользователи могут выполнять вычисления и другие операции, включая работу с графическими объектами. Каждый

элемент формы имеет свои уникальные свойства, которые определяют его внешний вид. Более подробную информацию для создания приложения можно получить в справочной системе Maple.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида: $A \cdot U_{xx} + 2 \cdot B \cdot U_{xy} + C \cdot U_{yy} + D \cdot U_x + E \cdot U_y + F \cdot U = 0$.

Введите значения коэффициентов:

A = 1 B = 1 C = 1 D = 1 E = 1 F = 0

Составить характеристическое уравнение

Вычислить корни характеристического уравнения

$dy'' - 2 \cdot dx \cdot dy + dx^2 = 0$ 1, 1

Вычислить значение определителя

0

Выберите значение определителя

Больше 0 Равен 0 Меньше 0

Вычисляем значение производной ξ : Вычисляем значение производной η :

$\xi_x = -1$ $\xi_y = 1$ $\eta_x = 1$ $\eta_y = 0$

$\xi_{xx} = 0$ $\xi_{yy} = 0$ $\eta_{xx} = 0$ $\eta_{yy} = 0$

$\xi_{xy} = 0$ $\eta_{xy} = 0$

Вычисляем значение производной U:

$U_x = -\eta \cdot \xi + \eta$ $U_y = \xi$

$U_{xx} = \xi \cdot \xi - 2 \cdot \eta \cdot \xi + \eta \cdot \eta$ $U_{xy} = \xi \cdot \eta$

$U_{yy} = \eta \cdot \eta$

Уравнение

$2 \cdot \xi \cdot \eta - 2 \cdot \eta \cdot \xi + \eta \cdot \eta + \eta$

Рис. 3. Результат работы приложения

Библиографический список

1. [Электронный ресурс] / <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=examples%2FMapletsTutorial>
2. Матросов, А. В. Основы работы в Maple / А. В. Матросов. – СПб., 1999. – URL: <http://www.apmath.spbu.ru/ru/structure/depts/is/Maple-Book.pdf>
3. [Электронный ресурс] – URL: / <http://detc.ls.urfu.ru/Assets/aMATH0011/soder.htm>
4. [Электронный ресурс] / – URL: <http://mif.vspu.ru/books/mapletut/page8.html>
5. Аладьев, В. 3. Программирование и разработка приложений в Maple / В. 3. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба. – URL: [http://cmcstuff.esyr.org/el-net-20111113/5th%20Semestre/2%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA/\[313\]%20%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA/!MAPLE/GRSU.pdf](http://cmcstuff.esyr.org/el-net-20111113/5th%20Semestre/2%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA/[313]%20%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA/!MAPLE/GRSU.pdf)

7. ДИСКУССИОННЫЙ РАЗДЕЛ

НОВЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ И ОСНОВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Л. Г. Сушков

г. Пенза, Россия

E-mail: suskovleonid0@gmail.com

В настоящей статье выдвигается вопрос пересмотра аксиоматизации арифметики, так как на основе полученных новых фактов вытекает, что креативное множество $R \geq 0$ положительных действительных чисел является асимметричным относительно сегмента $[0,1] \subset R^{\geq 0}$.

Это, как известно, не свойственно абстрактно отображаемым математикой природным явлениям. Напомню, что в физике подобное обстоятельство рассматривалось А.Эйнштейном как одна из важнейших посылок для создания теории относительности.

Рассматриваемый в статье вопрос возник в связи с тем, что обнаружился недостаток строительного материала, – базой поставок которого для всей математики в целом предназначена служить арифметика. Выявился этот недостаток при решении концептуальной проблемы (далее КП) новых свойств положительных действительных чисел, сформулированной мной в 2006 г. Она восходит к высказыванию Г. Кантора (1883 г.) о том, что не исключаются возможными «новые свойства конечных вещественных чисел» в зависимости от актуально бесконечных величин (перифраза из [1, с. 5]).

Актуально бесконечные величины, разумеется, не доступны для конкретных вычислительных операций. Однако, я предположил, что подобная зависимость может находиться не только от них, но и от некоторого множества конечных чисел. На основе этого предположения мною была разработана процедурная (методологическая) проблема, решив которую, я и нашел соответствующую редукцию в область конечного, т.е. на интервал $(0, \infty)$.

В результате формулировка КП была уточнена. Последующее положительное ее решение в том же 2006 г. показало, что новые свойства обнаруживаются на сегменте $[1, C]$ в зависимости от чисел бесконечного полуинтервала $[C, \infty)$ с помощью некоторых, вполне доступных для конкретных вычислений, функциональных отношений (здесь C – определенная константа). При этом указанная Г.Кантором зависимость от актуально бесконечных величин представилась в качестве только

предельного случая, редуцируемого к $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, где x – элементы числовой оси области конечного.

В силу особенности Θ , установленной в упомянутых функциональных отношениях, новые свойства проявляются только при условии $x \geq 1$.

В связи с этим указанный в самом начале сегмент $[0, 1]$ и представился вне влияния Θ , что, однако, выглядит неестественно на полуинтервале $[0, \infty) = R^{\geq 0}$.

Поэтому легко видеть, что, на самом деле, в силу принципа симметрии, при построении множества положительных действительных чисел надо было рассматривать, во-первых, не $[0, \infty)$, а интервал $(0, \infty) = (\frac{1}{\infty}, 1] \cup [1, \infty)$, представленный бесконечным вглубь и вширь. В результате получаем симметричное построение перечней классов чисел

$R^{>0} = \bar{R}^{\geq \bar{1}} \cup R^{\geq 1}$, где $\bar{R}^{\geq \bar{1}} \subseteq (\bar{\infty}, \bar{1}]$ и $R^{\geq 1} \subseteq [1, \infty)$. При этом исходным классом является натуральный ряд N .

Символы $\bar{1} = 1$ и $\bar{\infty} = \frac{1}{\infty}$ означают, что в новом креативном подмножестве $\bar{R}^{\geq \bar{1}}$ принято основание $\frac{1}{p}$ системы счисления, т.е. обратное p , сравнительно с подмножеством $R^{\geq 1}$. В частности, при $p=10$, обратное ему $\frac{1}{p} = 0,1$ дает на сегменте $[0,1]$ (а теперь на бесконечном полуинтервале «вглубь» $(\bar{\infty}, \bar{1}]$) числа, так же удовлетворяющие условию $x \geq 1$, как и при $p=10$ на полуинтервале $[1, \infty)$, т.е. $\{\bar{\infty}, \dots, \bar{n}, \dots, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$, вместо $\{\frac{1}{\infty}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ для остова $\bar{N} \subset \bar{R}^{\geq \bar{1}}$.

Таким образом, симметрия построения классов чисел восстанавливается.

Вместе с тем, числа при $p < 1$ лишены свойств аддитивности, но у них сохраняется мультипликативность, позволяющая обнаруживать новые свойства чисел и на бывшем сегменте $[0, 1]$, ставшим теперь $(\bar{\infty}, \bar{1}]$

При этом мы получаем, очевидно, истинное отличное от множества Z целых чисел, расширение W натурального ряда N , а подмножества $\bar{N}$ и N новых «целых» чисел, составляющие W оказываются поэлементно взаимно обратными и предлагаются именоваться вицеверсными (от латинского *vice versa* - наоборот): $W = \bar{N} \cup N$.

Иными словами натуральный ряд приводит к иной арифметической системе.

Отсюда следует, что натуральный ряд на самом деле был принят в арифметике в качестве исходного – ошибочно и, следовательно, содержательная аксиоматическая теория натуральных чисел (САТ НЧ) – несостоятельная теория, так как построена на ложном основании (*error fundamentalis*).

Что касается возможного недоумения, как можно расширять натуральный ряд во взаимно обратных системах счисления ($p > 1$ и $p < 1$), то следует обратить внимание на то, что и множество Z целых чисел на самом деле было построено в разных системах счисления относительно знаков оснований счисления ($+p$ и $-p$) составляющих его подмножеств – целых положительных N^+ и отрицательных N^- чисел, а также третьего подмножества – синглтона $\{0\}$, основание счисления p , которого не существует. Но мы имеем многовековой навык не замечать этого.

Так, если в системе W множества «целых» вицеверсных чисел, как уже упоминалось, нарушается аддитивность, но сохраняется мультипликативность (например $\bar{2} + \bar{3} \neq \bar{5}$, но $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6}$), то в системе множества Z целых чисел – мультипликативность [например, $(-3)^2 \neq -9$].

Рассмотренные здесь некоторые результаты решения КП касаются, главным образом, вопроса корректности существующей ныне аксиоматизации всех математических теорий, так как в основе выбора аксиоматики их, лежит не дополненная до «пары» индукция, в то время как на необходимость этого дополнения – антииндукцию – указывают новые свойства чисел, как антипод ныне известных.

В связи с этим актуальность (а точнее – даже злободневность) вопроса пересмотра аксиоматизации арифметики выражается в виде неотложной повестки для пересмотра сферы внутреннего развития математики, так как в случае признания новых свойств положительных действительных чисел придется признать и односторонность существующего построения фундамента математики, обусловленную тем, что в силу метафизического способа мышления, игнорировался закон диалектического противоречия, выражающегося в данном случае как «индуктивность – антииндуктивность» и «рекурсия – антирекурсия».

Более подробное освещение результатов решения КП намечается в последующих публикациях статей, где, в частности, будет показана зависимость причины обращения в САТ НЧ к специальным допущениям от основного заблуждения (*error fundamentalis*), сопровождающейся логическими ошибками как в САТ НЧ, так в САТ целых чисел.

Теория же новых свойств чисел и связанное с последними уточнение построения оснований арифметики намечается представить в виде монографии. В ней предполагается рассмотреть новое, уточненное, представление оснований арифметики. По аналогии с геометрией, состоящей из двух основных систем – евклидовой и неевклидовой – новое построение оснований арифметики так же должно быть представлено двумя более или менее подобными системами.

При этом, оказывается, что если в качестве исходного множества принять натуральный ряд (множество целых положительных чисел), то система арифметики должна быть без нуля и отвечать как бы неевклидовой геометрии в рассматриваемой аналогии.

Эта система арифметики выдвигается отнюдь не взамен САТ НЧ, это принципиально новая система, пригодная только для уточнения сферы внутреннего развития математики.

Взамен же САТ НЧ выдвигается САТ континуума, разбитого на отрезки $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., что восходит к представлениям Ф.Клейна, отвергнутым в пользу натурального ряда. Теперь же это представление Клейна подтверждается новыми свойствами чисел. В этом свете оказывается неверным представление изоморфизма множеств целых положительных и неотрицательных чисел: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$, ..., положенного в основу САТ НЧ, так как на самом деле имеет место $1 \leftrightarrow [0, 1]$, $2 \leftrightarrow [1, 2]$, $3 \leftrightarrow [2, 3]$

Иными словами, элементам множества целых положительных чисел, - называемых также натуральным рядом N

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}, \quad (1)$$

- сопоставляются во взаимно однозначное соответствие на самом деле не элементы креативного множества N_0 , якобы существующих неотрицательных целых чисел

$$N_0 = N_0 \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}, \quad (2)$$

а отрезки Δx континуума L , т.е.

$$\Delta x = [n, n+1]. \quad (3)$$

Последние в пределе представляются бесконечно малыми, но тем не менее, также отрезками (или, точнее «отрезочками») по-прежнему удовлетворяющими (3), т.е. имеющими начальную границу n и конечную $- n+1$.

Эти «отрезочки», как известно, символически изображают в виде dx , а сумму их – через интеграл, определяющий протяженность L :

$$L = \int dx. \quad (4)$$

Следовательно, множество N_0 - не дискретное, а непрерывное, равное L . Отсюда вытекает, что оно не может быть изоморфным натуральному ряду N , так как будучи представленным бесконечно малыми величинами, должно быть отнесено скорее к несчетному множеству, чем к счетному.

Таким образом, мы получаем решение задачи, которую ставил Н. Н. Лузин (1883 – 1950) в качестве цели разрабатываемой им дескративной теории множеств. Он писал: «Целью теории множеств является

вопрос чрезвычайной важности: можно или нет рассматривать линейную протяженность атомистическим образом как множество точек; вопрос этот, кстати, уже не нов, и восходит к эллинам» [2, с. 12].

Как видно из вышеизложенного, линейная протяженность L не может рассматриваться атомистическим образом.

Сам Н. Н. Лузин, исследуя множества измеримых B , все более и более склонялся к мысли, «что пришло время произвести реформу в наших идеях об арифметическом континууме» [2, с.269].

Позже, дополняя свой ДАН СССР (1943 г.), он в статье с тем же названием «О частях натурального ряда» (1947 г.) писал: «Близость в арифметике той реформе, которую выполнил Лобачевский в геометрии, зависит от принципиальности мыслителей, становящихся на этот путь, а также, по справедливому замечанию акад. И.П.Павлова, от смелости их концепции» [2, с. 722].

Что касается обоснования САТ НЧ посредством общей теории алгебраических систем [3, стб, 877], то будет показано, что при этом использованы опять же снижающие строгость до паллиатива новые специальные допущения, к которым можно отнести, например, уже рассмотренный выше изоморфизм множеств целых положительных и неотрицательных чисел, ослабление принципа (аксиомы) объемности, абсолютизацию индукции и др.

Естественно, иначе будет выглядеть теория Z целых чисел, - как отрезков континуума, - однако, это не изменит и не усложнит операции вычислений, принятые в современной арифметике. Иными словами, порядок преемственности сохраняется, а уточнение состоит в том, что эмпирически образовавшееся множество Z целых чисел теперь объяснится не счетом предметов, а измерением протяженности, - к чему, собственно, говоря, оно и восходило в начале, но было пересмотрено после формализации арифметики вследствие введения второго варианта аксиоматики Пеано (с аксиомой $0 \in N$, вместо $1 \in N$ в первом варианте).

Библиографический список

1. Антипенко, Л. Г. Проблема неполноты теории и ее гносеологическое значение / Л. Г. Антипенко. – М. : Наука, 1986.
2. Лузин, Н. Н. Собрание сочинений / Н. Н. Лузин. – М. : Изд-во АН СССР, 1958. – Т. II.
3. Нечаев, В. И. Число. Математическая энциклопедия / В. И. Нечаев. – М. : СЭ, 1985. – Т. 5. – С. 873–878.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<i>Бельский В. А.</i> Об устойчивости и периодических решениях неавтономных систем.....	3
<i>Искандаров И. К., Имомназаров Х. Х., Урев М. В.</i> Об одной краевой задаче для одной переопределенной системы.....	6
<i>Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н., Дрегля А. И.</i> О неограниченных решениях начальной задачи для дифференциального уравнения с необратимым оператором в главной части.....	10
<i>Мегралиев Я. Т., Искендерова Г. Н., Аллахвердиева С. И.</i> Линейные обратные задачи для гиперболического уравнения с нелокальными по времени условиями	15
<i>Искандаров И. К., Имомназаров Х. Х., Урев М. В.</i> Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде.....	20
<i>Бойков И. В., Рязанцев В. А.</i> О достаточных критериях устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков	26
<i>Кормишина В. В.</i> О некоторых методах решения параболических уравнений в частных производных.....	33

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

<i>Абрамов И. А., Симакова Е. Н.</i> Дискретное вейвлет-преобразование изображений в мультипроцессорных системах с общей памятью	40
<i>Гомзева Е. Н., Захарова Ю. Ф.</i> Пошаговое уточнение спутниковых данных методами теории аппроксимации.	44
<i>Павлова А. А., Иутин Р. В., Якупов З. Я., Галимова Р. К.</i> Закономерности полиномиальной формулы для определенных видов многочленов	48
<i>Саникидзе Д. Г., Купатадзе К. Р., Мирианашвили М. Г.</i> О некоторых прикладных аспектах построения и исследования квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Коши применительно к вопросу их обоснования и приложений	53

Козинова А. А. Теорема Уиттекера – Шеннона – Котельникова (обзор)	55
Тында А. Н., Бобров В. В. К вопросу аппроксимации кратных интегралов с особенностями.....	61

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Агафонов А. Е., Кудряшова Н. Ю. Численные методы решения нелинейных уравнений теплопроводности	66
Грунина Т. В., Канаева А. С. Численное решение коэффициентной обратной задачи для эллиптического уравнения	69
Грунина Т. В., Кунцова Е. С. Численный метод решения коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения	74
Леонтьев Р. Ю. О малых решениях нелинейных операторных уравнений с векторным параметром	80
Смаилов К. К., Засов В. А. Анализ эффективности параллельных алгоритмов решения дифференциальных уравнений в частных производных	83
Овчарёв О. В. О некоторых методах решения гиперболических уравнений в частных производных	89
Тында А. Н., Кабулахин В. В. Об одном методе решения систем неклассических интегральных уравнений Вольтерра.....	95
Тельнова Л. В., Кудряшова Н. Ю. Методы решения обратной граничной задачи теплопроводности	101
Степанов Н. С., Алексеев И. Ю. Применение аффинных преобразований для построения фракталов	107
Тында А. Н., Сальников Д. В. Сглаживающие преобразования слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра II рода	112
Шалдаева А. А., Кудряшова Н. Ю. Численные методы решения нелинейных интегральных уравнений.....	118
Тында А. Н., Тимошенков К. А. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в сложных областях методом граничных интегральных уравнений	124
Тарасов Д. В., Зверовщикова Н. В., Алексеев И. Ю., Степанов Н. С. Аппроксимация ядра в методе коллокаций при решении интегрального уравнения Вольтерра.....	136

Яблоков Д. Е. Влияние способа представления данных с помощью линейных диапазонов на эффективность алгоритмов	141
Янбаева А. Р. Об методах решения разностных систем для дифференциальных уравнений эллиптического типа	147
Цуцаев А. О., Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности на отрезке $[-1;1]$ с весовой функцией вида $\rho(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$	153
Тында А. Н., Старкова А. А. Метод синк-коллокации для решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма	158

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Дмитриева А. А., Простова Н. В. О некоторых обобщениях простейшей модели иммунологии	164
Дубинина К. С. Использование алгоритмов теории графов для процедуры формирования матрицы парных сравнений в методе анализа иерархий	170
Коротченко М. А. Построение статистических оценок с помощью моделирования динамики цен в рамках кинетической модели ценообразования	174

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Лавров А. В., Сизиков В. С. Разделение перекрывающихся спектральных линий путем дифференцирования с использованием сплайнов и минимизации функционала невязки	180
Акулова А. Е., Мойко Н. В. Математические модели вязкоупругих взаимодействий	186
Аннина Ю. В. О некоторых применениях метаматериалов в вычислительной технике	191
Бойков И. В., Зелина Я. В. Приближенный метод решения амплитудно-фазовой проблемы для двумерных непрерывных отображений	197
Гордюшкин И. В., Литвинов А. Н. Моделирование динамики замкнутых контактных систем коммутирующих устройств	201

Банникова А. Н., Мартышкина Н. А. Восстановление зашумленных изображений	205
Зайцева А. А. Особенности моделирования электронных лаavin в кислороде методом Монте-Карло	209
Имомназаров Б. Х., Няго В. А., Имомназаров Х. Х., Коробов П. В. Теории пороупругости химически активного глинистого сланца.....	213
Крюкова Д. В., Захарова Ю. Ф., Захаров О. В. Цифровая обработка канальных сигналов в системах мобильной связи GSM.....	218
Макарычев П. П. Модель многокритериального анализа решений на основе качественных шкал.....	223
Ирышкова Ю. В., Кудряшова Н. Ю. Об одном методе решения задачи о промерзании влажного грунта (задача Стефана)	227
Засов В. А. Адаптивный эквалайзер.....	232
Салимов Г. Ю., Захарова Ю. Ф., Петрук М. А. Криптографические операции в блочных алгоритмах шифрования.....	237
Маслов Е. С., Сандлер И. Л. Критерий идентификации параметров дискретных динамических систем с распределенными параметрами при наличии помех наблюдений в выходных сигналах	241
Першенков П. П., Грозная Е. В. Фотогальванический эффект в асимметричных наноструктурах и его практическое применение.....	245
Сипягина Е. Е., Черушева Т. В., Алексеев И. В. О методах обработки речевых сигналов.....	249
Сандлер Е. А. Рекуррентная идентификация параметров электропривода переменного тока методом стохастической аппроксимации.....	252
Сипягина Е. Е., Черушева Т. В. Выделение признаков речевых сигналов, различающихся в мужской и женской речи	255
Черушева Т. В., Нурков А. С. Кепстральный анализ речевых сигналов	259
Снегур М. О. Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах анизотропного волновода.....	264
Сыромясов А. О. Движение одиночного тела вращения внутри барабанной мельницы.....	269

Сандлер И. Л. Исследование сходимости авторегрессионной многомерной дискретной ЛДС-системы	274
Яблокова Л. В. Моделирование влияния технологических погрешностей изготовления на работу цилиндрической кремниевой линзы Френеля с высокой числовой апертурой в терагерцовом диапазоне	278
Сангинова М. Р., Захарова Ю. Ф. Проблемы сохранения передаваемой информации при одновременном использовании аудио-и видеостегоконтейнера.....	284
Дворянкин А. С., Грозная Е. В., Мойко Н. В. Методы решения краевых задач для уравнения Гельмгольца	288
Краснухина К. А., Захаров О. В. Математические основы 3D моделирования	294

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В. Особенности обучения математическим методам распознавания геометрических образов студентов колледжей.....	299
Остудина Ю. В., Мойко И. М. Использование пакета STUDENT[CALCULUS1] при изучении разделов математического анализа.....	303
Добрынина Н. Ф. Модель распространения знаний и управление процессом обучения студентов с использованием синергетики.....	311
Исаева А. А., Мойко И. М. Применение интерактивных Maplet в изучении разделов высшей математики	317

7. ДИСКУССИОННЫЙ РАЗДЕЛ

Сушков Л. Г. Новые свойства чисел и основания арифметики	324
---	-----

Научное издание

Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем

Материалы

*XII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
Россия, г. Пенза, 28–31 мая 2018 г.*

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science
and Social Problems (MCM-2018)

*Proceedings of the Twelfth International
Conference MCM-2018*

Penza, Russian Federation, 28–31 May, 2018

E d i t e d b y
Ilya V. **Boikov**

Все материалы представлены в авторской редакции

Компьютерная верстка Д. В. Тарасова

Подписано в печать 25.05.2018. Формат 60×84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 19,41.

Заказ № 262. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru